

Méthodes de gradient stochastique pour l'optimisation des investissements dans un réseau électrique

*Stochastic gradient methods
for optimizing investments
in electric power system studies*

J.C. Dodu *, M. Goursat **, A. Hertz *,
J.P. Quadrat ** et M. Viot **

INTRODUCTION

Etant donné un ensemble de moyens de production et une demande d'électricité, on se propose d'optimiser les capacités des lignes d'un réseau de transport, de façon à minimiser la somme des coûts de production et des coûts d'investissements.

Le système est soumis à un certain nombre d'aléas :

- indisponibilité des moyens de production ;
- indisponibilité des lignes de transport ;
- caractère aléatoire de la demande.

Le problème est dynamique car chaque année il faut déterminer les investissements à faire qui s'ajoutent à ceux déjà réalisés. Nous étudierons ici essentiellement le problème statique (un seul pas en temps). L'extension au cas dynamique ne pose aucune difficulté supplémentaire excepté l'augmentation de la taille du système à optimiser ; nous en parlerons brièvement.

D'autre part, le problème se pose en variables mixtes. Les variables correspondant aux capacités des lignes de transport doivent être choisies dans un ensemble discret. Les variables continues sont soit les flots d'énergie dans les arcs de transport pour une situation aléatoire donnée, soit les niveaux de production des diverses centrales.

Les lois physiques régissant le transport de l'énergie sont les deux lois de Kirchoff ; en fait, on travaille ici avec un réseau agrégé et seule la première loi de Kirchoff est prise en compte en chaque nœud du réseau, (le flot d'énergie entrant est égal au flot d'énergie sortant).

Dans une première partie, on présente le modèle et on définit le problème d'optimisation.

Dans une deuxième partie, on rassemble les résultats sur la méthode de gradient stochastique, et on donne quelques résultats numériques comparant les méthodes du premier ordre et du second ordre (cas où l'on utilise la Hessienne de la fonction à minimiser). On montre que cette méthode atteint la vitesse asymptotique optimale au sens où elle atteint une borne déduite du théorème de Cramer-Rao.

* Département Méthodes d'Optimisation.

** INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt.

Dans la troisième partie, on indique les résultats numériques obtenus par la méthode du gradient stochastique sur un réseau français agrégé, dans le cas où les capacités des lignes appartiennent à un ensemble "continu".

Dans une quatrième partie, on étudie le problème d'investissement à valeurs entières. On montre que dans le cas déterministe le problème est *NP* complet. On donne un résultat indiquant des cas où la solution du problème "continu" est entière. Enfin, on présente trois heuristiques basées sur le gradient stochastique. On présente les résultats numériques obtenus grâce à ces trois méthodes sur le réseau précédent. On montre en particulier que l'on obtient aussi une solution entière à 8 % de la solution continue.

Notations de la partie application.

N	ensemble des nœuds, $N_0 = N \cup \{0\}$.
T	ensemble des arcs de transport.
D	ensemble des arcs de demande.
G	ensemble des arcs de production (génération).
A	matrice d'incidence de graphe.
Ω	ensemble de situations, $\omega \in \Omega$.
$TDG = T \cup D \cup G$, $TD = T \cup D$, $TG = T \cup G$ etc.	
β	taux d'actualisation.
s	temps.
S	période de gestion.
$q_j(\omega)$	flot d'énergie dans l'arc j dans la situation ω .
$\check{q}_j(\omega)$	capacité de l'arc j dans la situation ω .
Q_j	investissement réalisé sur l'arc j .
$c_j(q_j)$	coût du flot q_j .
$C_j(Q_j)$	coût de l'investissement Q_j .
U_j^s	investissement réalisé l'année s sur l'arc j .
J	sous-ensemble de GT .
$t_j(x)$	nombre d'heures où la demande est supérieure à x sur l'arc $j \in D$.
F_j	fonction de répartition de la demande sur l'arc $j \in D$.
γ_j	taux de panne du groupe de production j .
k	type de moyen de production, G_k sous-ensemble des arcs de production associé au moyen de production de type k .
b_k	budget associé au moyen de production de type k .
$\Phi(Q, \omega)$	coût de gestion.
$\phi_{a,b}(Q)$	fonction de pénalisation.
$J(U, \omega)$	coût de gestion + coût d'investissement sur une réalisation dans le cas évolutif.
P_r	opérateur de projection.
χ_A	fonction caractéristique de l'ensemble A .
p_i	probabilité de tirer l'investissement 1 sur l'arc i .
$m = \text{card}(T)$.	

Notations de la partie théorique

- f fonction à minimiser.
 E espérance mathématique.
 $-$ désignera également l'espérance mathématique, ex. \bar{f} .
 D_x opérateur gradient par rapport à x .
 D_{xx} opérateur dérivée seconde par rapport à x .
 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ espace probabilisé ; Ω espace des événements, \mathcal{B} tribu sur Ω , μ probabilités sur (Ω, \mathcal{B}) , les événements sont notés $\omega \in \Omega$.
 $L_1(\Omega, \mathcal{B}, \mu) = \{h(\omega) \mid \int |h(\omega)| \mu(d\omega) < \infty\}$.
 x élément de \mathbf{R}^d .
 C convexe de \mathbf{R}^d .
 P_C projecteur sur C .
 $M = \underset{x \in C}{\text{Argmin}} \bar{f}(x)$, m élément de M .
 $\ell(x)$ distance de x à M .
 $y_n = E \ell^2(x_n)$.
 g élément du sous-différentiel de f .
 c coefficient de coercivité.
 q majorant de la norme du sous-différentiel de f .
 a_n pas scalaire dans la méthode du gradient stochastique.
 A_n pas matriciel dans la méthode du gradient stochastique.
 k, k_0, k_1 constantes intermédiaires dans les calculs.
 ϵ élément de \mathbf{R} destiné à être petit.
 F_n désigne la tribu engendrée par $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$.
 \mathcal{G} famille de loi de probabilité sur (Ω, \mathcal{B}) .
 \mathcal{I} matrice d'information.
 r paramétrisation du simplexe de \mathbf{R}^m .
 $\bar{f}_\mu(x) = E_\mu f(x)$.
 D matrice $\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \mu_m \end{bmatrix}$
 h matrice servant à paramétriser le simplexe de \mathbf{R}^m .
 $'$ transposition.
 I_m matrice identité dans \mathbf{R}^m .
 $\frac{1}{2} xBx - bx + \omega x$ forme quadratique à minimiser.
 R_n matrice de covariance $E(x_n - x_\mu)^{\otimes 2}$.
 Q covariance du bruit $Q = E \omega_n^{\otimes 2}$.
 $z_n = x_n - x_\mu$.
 $\theta = \frac{c - v}{v + q} \quad v = \sup_{\substack{x, \omega \\ x \in C}} |G(x) - g(x, \omega)| \quad q = \sup_{x \in C} G(x)$.

1 - LE MODELE MATHEMATIQUE

1.1 - Le graphe associé au système production transport

Les nœuds $i \in N$ représentent les différentes régions. A N on rajoute un nœud fictif noté 0 jouant le rôle de source pour les productions et de puits pour les demandes. On note $N_0 = N \cup \{0\}$.

Les arcs $j \in T$ représentent les lignes de transport, ils joignent deux éléments de N .

Les arcs de production $j \in G$ joignant 0 à un élément de N , sont associés à un groupe de production.

Les arcs de consommation $j \in D$ joignant un élément de N à 0, représentent la demande d'une région.

On note par A la matrice d'incidence nœuds-arcs associée au graphe précédent. Elle a $\text{CARD}(N) + 1$ lignes et $\text{Card}(TGD)$ colonnes. TGD désigne ici l'ensemble $T \cup G \cup D$.

$$\begin{aligned} A_i^j &= +1 && \text{si } i \text{ est le nœud d'arrivée de l'arc } j, \\ A_i^j &= -1 && \text{si } i \text{ est le nœud de départ de l'arc } j \\ A_i^j &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

1.2 - Aléas et coûts du système

L'état de disponibilité du parc de production, des lignes de transport, le niveau de la demande d'électricité sont supposés être des fonctions connues de $\omega \in \Omega$. ω sera appelé situation du système.

Pour une situation $\omega \in \Omega$, et un arc de production $j \in G$, on désigne par :

- $q_j(\omega)$ le niveau de production.
- $\check{q}_j(Q_j, \omega)$ la capacité de production dans la situation ω , pour une capacité de production investie Q_j .
- $c_j(q_j)$ le coût de production instantané de la puissance q_j .
- $C_j(Q_j)$ le coût de l'investissement Q_j .

On a alors les inégalités :

$$0 \leq q_j(\omega) \leq \check{q}_j(Q_j, \omega) \leq Q_j \quad \forall \omega, \forall j \in G$$

Pour un arc de production $j \in T$ et la situation ω on désigne par :

- $q_j(\omega)$ le flot transporté
- $q_j(Q_j, \omega)$ la capacité de transport disponible dans la situation ω pour une capacité installée Q_j .
- le coût de transport $c_j(q_j)$ sera supposé nul.
- $C_j(Q_j)$ le coût de l'investissement en ligne de transport Q_j .

On a les inégalités :

$$0 \leq |q_j(\omega)| \leq \check{q}_j(Q_j, \omega) \leq Q_j \quad \forall j \in T, \forall \omega \in \Omega.$$

Pour un arc de demande $j \in D$ et une situation $\omega \in \Omega$:

- $q_j(\omega)$ désigne la demande satisfaite
- $\check{q}_j(\omega)$ la puissance demandée dans la situation ω , variable aléatoire à valeur dans $[0, Q_j]$ de loi donnée.
- $c_j(q_j)$ représente le gain changé de signe associé à la vente de q_j , ou inversement $c_j(\check{q}_j(\omega) - q_j(\omega))$ la pénalité associée à la demande non satisfaite $\check{q}_j(\omega) - q_j(\omega)$.

On a toujours les inégalités :

$$0 \leq q_j(\omega) \leq \check{q}_j(\omega) \leq Q_j$$

Remarque : La demande évolue dans le temps. Pour tenir compte de cette évolution dans une modélisation statique du problème, on introduit la courbe de charge $t_j(x)$ pour $j \in D$:

$$t_j(x) = \int_0^S 1_{[x, \infty)}(\check{q}_j(s)) ds$$

Elle est égale au temps, dans la période $[0, S]$, où la demande est supérieure à x .

$$F_j(x) = \frac{1}{S} t_j(x)$$

vérifie $0 \leq F_j(x) \leq 1$ et est décroissante en x , et peut donc s'interpréter comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire $\check{q}_j(\omega)$ à valeur dans $[0, Q_j]$ où Q_j désigne la demande maximum sur $[0, S]$.

En situation stochastique, on pourra prendre

$$F_j(x) = \frac{1}{S} \mathbf{E} \int_0^S 1_{[x, \infty)}(\check{q}(s, \omega)) ds$$

Cette remarque permet donc de définir la loi de $\check{q}_j(\omega)$, $j \in D$, y compris en situation déterministe.

1.3 – Le problème d'optimisation

Désignons par s l'instant (l'année considérée), par S la période sur laquelle on veut optimiser, par U_j^s , $j \in GT$ (GT désigne $G \cup T$) l'investissement de l'année s en production si $j \in G$ et en transport si $j \in T$.

On a alors les équations d'évolution des investissements :

$$Q_j^{s+1} = Q_j^s + U_j^{s+1} \quad s \in [0, S-1], j \in GT \quad (1)$$

$$U_j^s \geq 0 \quad s \in [1, S], j \in GT \quad (2)$$

$$0 \leq Q_j^s \leq \check{Q}_j, \quad j \in T, s \in [1, S] \quad (3)$$

\check{Q}_j désigne une limite physique aux capacités de lignes que l'on peut construire dans un couloir donné. Q^0 est donné et représente le réseau existant.

Les équations du réseau dans une situation donnée s'écrivent :

$$Aq^s(\omega) = 0 \quad (4)$$

$$|q_j^s(\omega)| \leq \check{q}_j^s(Q^s, \omega) \quad j \in T \quad (5)$$

$$0 \leq q_j^s(\omega) \leq \check{q}_j^s(Q^s, \omega) \quad j \in G \quad (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} (4) \\ (5) \\ (6) \end{array} \right\} \quad \forall s \in [1, S], \forall \omega \in \Omega$$

Il faut alors minimiser la somme des coûts actualisés d'investissement et de gestion du système sur la période $[0, S]$, ce qui s'écrit :

$$\min_{\substack{U_j \\ j \in \mathcal{J}}} \sum_{s=1}^S \beta^s \left[\sum_{j \in \mathcal{J}} C_j(U_j^s) + \mathbf{E} \min_{\substack{q_j^s(\omega) \\ j \in GTD \\ \omega \in \Omega}} \sum_{j \in GD} c_j(q_j^s(\omega)) \right]$$

sous les contraintes (1) (2) (3) (4) (5) et (6).

$\mathcal{J} \subset GT$ est un sous-ensemble d'arcs sur lesquels on désire faire éventuellement des investissements, par exemple \mathcal{J} sera égal à T dans le cas où l'on cherche à déterminer les capacités de transport.

$0 < \beta < 1$ désigne un taux d'actualisation.

Nous étudions le problème statique ($S = 1$) dans deux cas : les variables U_j prennent des valeurs dans un convexe de \mathbf{R}^n , les variables U_j prennent des valeurs entières. Dans chacun de ces cas, nous précisons les choix de fonction q_j , C_j , c_j aux paragraphes correspondants ; en effet, le problème se pose naturellement en variables entières pour les investissements, ce qui conduit naturellement à des difficultés importantes de résolution, par contre une formulation "continue" ne pose pas de gros problèmes de résolution, mais plutôt un problème de modélisation.

Dans le paragraphe suivant, nous rassemblons les résultats sur la méthode de gradient stochastique qui nous permettront de résoudre le problème "continu" et qui nous donneront des heuristiques pour le problème en nombre entier.

2 - LA METHODE DU GRADIENT STOCHASTIQUE

2.1 - L'algorithme

Etant donnée une fonction $f : \mathbf{R}_{x,\omega}^d \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}_{f(x,\omega)}^+$, on veut minimiser

$$\bar{f}(x) = \mathbf{E} f(x) = \int f(x, \omega) \mu(d\omega)$$

par rapport à x où μ désigne une loi de probabilité sur (Ω, \mathcal{B}) espace représentant les aléas du système.

L'algorithme du gradient stochastique consiste alors à faire évoluer la variable à optimiser x selon la formule de récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n - a_n D_x f(x_n, \omega_n)$$

où

$$a_n \in \mathbf{R}^+, \forall n \in \mathbf{N} \quad \text{et vérifie} \quad \sum_n a_n = \infty, \quad \sum_n a_n^2 < \infty$$

Les ω_n désignent des tirages indépendants de loi μ .

Cet algorithme, ou des variantes sont anciens ; citons les initiateurs H. Robbins, S. Monro [1], J. Kiefer, J. Wolfowitz [2]. Plus récemment, citons B.T. Polyak [3] [4], B.T. Polyak, Y.Z. Tsytkin [5] dans lesquels il est donné des résultats de convergence globale sous les hypothèses de convexité, ainsi que des études de vitesse de convergence et diverses variantes de cet algorithme. Dans H.J. Kushner [6] on trouvera la méthode de l'équation différentielle moyenne qui permet l'étude de la convergence locale de cet algorithme et de ses variantes. Cette approche est très utile dans le cas non convexe.

Dans cette partie, nous reprendrons les techniques de Polyak pour montrer la convergence de l'algorithme et pour donner des résultats sur la vitesse de convergence. Nous donnerons un résultat indiquant que les algorithmes du second ordre, situation dans laquelle a_n est la matrice $1/n D_{xx}^{-1} \bar{f}(x_n)$, atteignent la vitesse maximum possible (explicitée en utilisant le théorème de Cramer-Rao). Nous donnons la preuve d'un résultat de Polyak indiquant une situation où on peut obtenir une vitesse exponentielle de convergence. Ce résultat est énoncé dans Polyak, mais la preuve n'a pas été publiée. Enfin, nous donnons des résultats numériques comparant les méthodes du premier et second ordre.

2.2 – Convergence de l'algorithme de gradient stochastique

Précisons les hypothèses.

On se donne :

$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace probabilisé, C un convexe de \mathbb{R}^d

$f : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ appartient à $L_1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, est convexe et continue en $x \forall \omega$ et vérifie :

$$\sup \{|g|, g \in D_x f(x, \omega), x \in C, \omega \in \Omega\} \leq q \quad (2)$$

D'autre part, si l'on note :

$$\bar{f}(x) = \int f(x, \omega) \mu(d\omega)$$

$$\bar{f}^* = \min_{x \in C} \bar{f}(x)$$

$$M = \underset{x}{\text{Argmin}} \bar{f}(x)$$

$$\varrho(x) = \text{distance de } x \text{ à } M.$$

On suppose que :

$$\bar{f}(x) - \bar{f}^* \geq c \varrho^2(x) \quad \forall x \in C \quad (3)$$

Si maintenant $g(x, \omega) \in D_x f(x, \omega)$ désigne une sélection mesurable du sous-gradient de $x \rightarrow f(x, \omega)$ et $\{a_n\}$ une suite vérifiant :

$$a_n \downarrow 0 \quad \text{et} \quad \sum a_n = \infty \quad (4)$$

on peut définir la suite de variables aléatoires

$$x_{n+1} = P_C(x_n - a_n g_n), \quad x_0 \text{ donné,} \quad (5)$$

où $g_n = g(x_n, \omega_n)$ et $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n \dots) \in (\Omega, \mathcal{B}, \mu)^{\otimes N}$ désigne une suite de tirages indépendants de loi μ .

On note $y_n = \mathbf{E} \varrho^2(x_n)$. On a alors le

THEOREME 1 : (Convergence en moyenne quadratique et vitesse de convergence).

Sous les hypothèses (1) à (4), la suite x_n vérifie $\lim_n y_n = 0$. De plus, pour une suite a_n de la forme :

$$a_n = \frac{1}{cn + \frac{q^2}{y_0 c}} \quad \forall n \quad (6)$$

on obtient la vitesse de convergence :

$$y_n \leq \frac{1}{\frac{c^2}{q^2} n + \frac{1}{y_0}} \quad \forall n$$

Démonstration

Soient $m_n \in C$ tels que $\varrho^2(x_n) = |x_n - m_n|^2$ et F_n la sous-tribu engendrée par les $n + 1$ premiers tirages $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$.

D'après (6), on a :

$$\begin{aligned} \varrho^2(x_{n+1}) &\leq |x_{n+1} - m_n|^2 \leq |x_n - m_n|^2 - 2a_n(g_n, x_n - m_n) + a_n^2 |g_n|^2 \\ &\leq \varrho^2(x_n) - 2a_n(g_n, x_n - m_n) + a_n^2 q^2 \end{aligned}$$

En effet :

$$|x_{n+1} - m_n|^2 = |P_C(x_n - a_n g_n) - m_n|^2 \leq |x_n - a_n g_n - m_n|^2$$

car $m_n \in C$

En prenant les espérances conditionnelles connaissant F_n on obtient :

$$E^{F_n}(\varrho^2(x_{n+1})) \leq \varrho^2(x_n) - 2a_n(\bar{g}_n, x_n - m_n) + a_n^2 q^2$$

où $\bar{g}_n = \int g(x_n, \omega) \mu(d\omega) \in D_x \bar{f}(x_n)$

La convexité de f entraîne

$$E^{F_n}(\varrho^2(x_{n+1})) \leq \varrho^2(x_n) - 2a_n(\bar{f}(x_n) - \bar{f}^*) + a_n^2 q^2 \quad (8)$$

et d'après (3), en prenant l'espérance mathématique

$$y_{n+1} \leq y_n(1 - 2a_n c) + a_n^2 q^2 \quad (9)$$

Par récurrence, on obtient :

$$y_{n+k} \leq y_n \prod_{i=0}^{k-1} (1 - 2c a_{n+i}) + q^2 \sup_{\ell \geq n} a_\ell \left(1 - \prod_{i=0}^k (1 - 2c a_{n+i})\right)$$

et (4) entraîne que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

Etudions maintenant la vitesse de convergence de y_n . En notant $A = \frac{c^2}{q^2}$, $B = \frac{1}{y_0}$, $D = \frac{1}{c}$, avec $a_n = \frac{D}{n + B/A}$, (9) devient :

$$\begin{aligned} ((n+1)A + B)y_{n+1} &\leq (nA + B)y_n \left(1 + \frac{1}{n + B/A}\right) \left(1 - 2c \frac{D}{n + B/A}\right) \\ &\quad + \frac{D^2 q^2}{(n + B/A)^2} [(n+1)A + B] \end{aligned}$$

Supposons que $(nA + B)y_n \leq 1$ et montrons que l'on peut choisir A, B, D pour que $((n+1)A + B)y_{n+1} \leq 1$. Il faut que :

$$1 - \frac{2cD - 1}{n + B/A} - \frac{2cD}{(n + B/A)^2} + \frac{D^2 q^2}{(n + B/A)^2} [(n+1)A + B] \leq 1$$

d'où l'on tire les deux inégalités :

$$D^2 q^2 A - 2cD + 1 \leq 0$$

$$B/A(D^2 q^2 A - 2cD + 1) - 2cD + D^2 q^2 A \leq 0$$

On peut déterminer D et A en prenant une racine double du trinôme $c^2 - q^2 A = 0$ et $D = 1/c$; pour la seconde inégalité, il reste :

$$D^2 q^2 A - 2cD = 1 - 2 \leq 0$$

La condition initiale impose finalement $B \leq 1/y_0$.

Remarque : La valeur de a_n qui réalise le minimum de (9) est donnée par $a_n = \frac{c}{q^2} y_n$ ce qui conduit à l'inégalité :

$$y_{n+1} \leq y_n \left(1 - \frac{c^2}{q^2} y_n \right)$$

Le comportement asymptotique de y_n est donc le même que celui de l'équation différentielle $\dot{y} = -\frac{c^2}{q^2} y^2$ qui s'intègre $y(t) = \frac{1}{\frac{c^2}{q^2} t + \frac{1}{y_0}}$. Cette vitesse est bien la vitesse obtenue dans le théorème précédent.

Théorème 2 : (Convergence presque sûre).

Sous les hypothèses (1) à (5) et si l'on suppose de plus que $\sum_n a_n^2 < \infty$, alors $\lim \ell(x_n) = 0$ p.s. De plus, on a l'estimation :

$$P(\sup_{n \geq m} \ell^2(x_n) \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} \frac{k(m)}{\frac{1}{y_0} + m \frac{c^2}{q^2}} \text{ où } k(m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1.$$

Démonstration

Posons $Y_n = \ell^2(x_n) + \sum_{i \geq n} a_i^2 q^2$. De (8) on déduit :

$$\mathbf{E}^{F_n}(Y_{n+1}) \leq \ell^2(x_n) + a_n^2 q^2 + \sum_{i \geq n+1} a_i^2 q^2 = Y_n$$

Y_n est donc une F_n -surmartingale positive. Y_n converge donc presque sûrement. Comme $\lim \mathbf{E}(Y_n) = \lim y_n$, le résultat implique que $\lim Y_n = \min \ell^2(x_n) = 0$ p.s.

L'inégalité de Kolmogorov sur les surmartingales Neveu [7] donne :

$$P(\sup_{n \geq m} Y_n \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} E(Y_m)$$

En utilisant alors l'inégalité $Y_n \geq \ell^2(X_n)$, on a :

$$\begin{aligned} P(\sup_{n \geq m} \ell^2(x_n) \geq \epsilon) &\leq \frac{1}{\epsilon} \left(y_m + \sum_{n \geq m} a_n^2 q^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{\frac{c^2}{q^2} m + \frac{1}{y_0}} + \sum_{n \geq m} \frac{c^2/q^2}{\left[\frac{c^2}{q^2} n + \frac{1}{y_0} \right]^2} \right) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2.3 - Optimalité de l'algorithme du gradient stochastique.

Nous montrons dans ce paragraphe que d'une certaine façon, l'algorithme de gradient stochastique est optimale dans l'ensemble des algorithmes possédant la même information sur la loi du bruit, c.à.d un échantillon de taille n de la valeur du coût.

2.3.1 - Minoration de la distance à l'optimum en fonction de la taille de l'échantillon

On considère la structure statistique $(\Omega, \mathcal{B}, \mu \in \mathcal{Q})$. \mathcal{Q} est ici le simplexe de \mathbb{R}^m , c.à.d que l'on est dans la situation où la probabilité $\mu \in \mathcal{Q}$ est discrète de support constitué de m atomes

$$= \left((\mu_1, \dots, \mu_m) \mid \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \mu_i = 1 \right)$$

Etant donné $x \in \mathbb{R}^d$ la fonction coût est une application

$$f: \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ uniformément convexe en } x, \text{ 2 fois différentiable en } x, \quad (10)$$

on veut résoudre $\text{Min}_x (E_\mu f(x) \stackrel{\text{df}}{=} \bar{f}_\mu(x))$.

Etant donné un échantillon de taille n

$$(\Omega, \mathcal{B}, \mu \in \mathcal{Q})^{\otimes n} \quad (11)$$

une minoration au sens des matrices définies positives de $E_\mu (\hat{x} - x_\mu)^{\otimes 2}$ est donnée par la formule de Cramer Rao, \hat{x} étant une statistique sur (11), x_μ étant l'optimum recherché.

$$E_\mu (\hat{x} - x_\mu)^{\otimes 2} \geq \frac{1}{n} D_r x_\mu \mathcal{J}^{-1} D_r x_\mu, \quad \forall \hat{x}: E_\mu \hat{x} = x_\mu; \quad (16)$$

\mathcal{J} désigne la matrice d'information

$$\mathcal{J} = E (D_r \text{Log } \mu(r))^{\otimes 2},$$

r une paramétrisation du simplexe par exemple $r = (\mu_1, \dots, \mu_{m-1})$, on a alors

$$\mu_m = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} r_i.$$

La minoration cherchée est alors donnée par le résultat suivant :

THEOREME 3 : Sous l'hypothèse (10), on a :

$$E_\mu (\hat{x} - x_\mu)^{\otimes 2} \geq \frac{1}{n} D_x^2 \bar{f}^{-1}(x_\mu) Q_\mu D_x^2 \bar{f}^{-1}(x_\mu) \quad (12)$$

$\forall \hat{x}$ estimateur sans biais de x défini sur (11)

$$Q_\mu = E_\mu (D_x f(x_\mu))^{\otimes 2} \quad (13)$$

Démonstration

x_μ réalise le minimum de $E_\mu f(x) = \bar{f}_\mu(x)$. On a donc :

$$\sum_i \mu_i D_x f_i(x_\mu) = 0, \quad \forall \mu \in \mathcal{Q}. \quad (14)$$

(1) $f_i(x_\mu) = f(i, x_\mu)$, $i \in \Omega$.

On paramétrise la variété \mathcal{R} de dimension $m - 1$ en introduisant des nouvelles variables $r \in \mathbf{R}^m$ telles que :

$$D_r \mu(r) = h_{ij}(\mu) \quad i, j \in 1, \dots, m$$

où h est une matrice vérifiant :

$$h_{i1}(\mu) = \mu_i \quad \forall i \in 1, \dots, m$$

$$h' D^{-1} h = I_m \quad \text{où} \quad D = \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_m \end{bmatrix} \quad (15)$$

De (15), il vient

$$h' D^{-1/2} D^{-1/2} h = I_m$$

donc $h' D^{-1/2}$ est l'inverse de $D^{-1/2} h$. Ceci entraîne que $D^{-1/2} h h' D^{-1/2} = I_m$ soit $h h' = D$, ou encore $h^{-1} = h' D^{-1}$, et donc $D_\mu r = h' D^{-1}$. Finalement

$$dr_1 = \sum_{i=1}^m d\mu_i = d \sum_{i=1}^m \mu_i$$

et dans le nouveau système de coordonnées la variété $\Sigma \mu_i = 1$ devient $r_1 = \text{cte}$, et le simplexe \mathcal{R} pourra donc être paramétrisé par (r_2, \dots, r_m) .

On peut maintenant calculer l'information :

$$E_\mu (D_r \text{Log } \mu)^{\otimes 2} = \sum_{i=1}^m D_{r_k} \mu_i D_{r_\ell} \mu_i \frac{1}{\mu_i} \quad k, \ell = 2, \dots, m$$

$$= h' D^{-1} h = I_{m-1}$$

En différentiant (14) par rapport à r , on obtient :

$$\sum_k D_{x_j} f_k D_{r_\ell} \mu_k + \sum_{i,k} \mu_i D_{x_j x_k}^2 f_i D_{r_\ell} x_k = 0$$

$$\sum_k D_{x_j} f_k D_{r_\ell} \mu_k + \sum_k D_{x_j x_k}^2 \bar{f} D_{r_\ell} x_k = 0$$

et donc

$$D_{r_\ell} x_k = - [D_{x_j x_k}^2 \bar{f}]^{-1} [D_{x_j} f_k]' [D_{r_\ell} \mu_k]$$

et donc (16) devient :

$$E_\mu (\hat{x} - x_\mu)^{\otimes 2} \geq \frac{1}{n} D_x^2 \bar{f}^{-1} [D_{x_j} f_k] h_1 h_1' [D_{x_j} f_k] D_x^2 \bar{f}^{-1} \quad (17)$$

h_1 désigne la matrice obtenue à partir de h en ayant enlevé la première colonne.

On a, en utilisant (15) :

$$h_1 h_1' = D - \mu \mu'$$

et donc (17) devient :

$$E_\mu (\hat{x} - x_\mu)^{\otimes 2} \geq \frac{1}{n} [D_x^2 \bar{f}^{-1} E_\mu (D_x f)^{\otimes 2} D_x^2 \bar{f}^{-1} - D_x^2 \bar{f}^{-1} (E_\mu D_x f)^{\otimes 2} D_x^2 \bar{f}^{-1}]$$

mais, grâce à (14) $E_\mu [D_x f] = 0$, d'où le résultat. ■

Le résultat suivant montre que la solution de :

$$\text{Min}_x \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\omega_i, x) \stackrel{df}{=} F_n(x)$$

où $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ est une suite de tirages indépendants selon la loi μ , conduit à une solution optimale atteignant la borne du théorème précédent. On note :

$$\hat{x}_n = \underset{x}{\operatorname{Argmin}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\omega_i, x) \quad (18)$$

Sous les hypothèses (10), \hat{x}_n est unique.

THEOREME 4 : Sous les hypothèses (10) et $x \rightarrow f(\omega, x)$ a sa dérivée 3^e bornée, on a :

$$\sqrt{n}(\hat{x}_n - x_\mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{G}(0, D_{xx} \bar{f}_\mu^{-1}(x_\mu) Q_\mu D_{xx} \bar{f}_\mu^{-1}(x_\mu))$$

$$Q_\mu = E_\mu (D_x f(x_\mu))^{\otimes 2}$$

Démonstration

1) Montrons l'estimation suivante :

$$E |\hat{x}_n - x_\mu|^2 \leq q^2/c^2 n$$

En effet, on a par hypothèse :

$$f(\omega, x) - f(\omega, x_\mu) \geq (D_x f(\omega, x_\mu), x - x_\mu) + c |x - x_\mu|^2 \quad \forall \omega, \forall x$$

et donc :

$$F_n(\hat{x}_n) - F_n(x_\mu) \geq (D_x F_n(x_\mu), \hat{x}_n - x_\mu) + c |\hat{x}_n - x_\mu|^2$$

Par définition de \hat{x}_n , $F_n(\hat{x}_n) - F_n(x_\mu) \leq 0$. Et donc :

$$-(D_x F_n(x_\mu), \hat{x}_n - x_\mu) \geq c |\hat{x}_n - x_\mu|^2$$

En utilisant Cauchy-Schwartz, il vient

$$E |D_x F_n(x_\mu)|^2 E |x_\mu - \hat{x}_n|^2 \geq c^2 (E |\hat{x}_n - x_\mu|^2)^2$$

En utilisant le fait que la variable aléatoire $D_x f(x_\mu)$ est centrée, on a la majoration :

$$E |D_x F_n(x_\mu)|^2 \leq \frac{q^2}{n}$$

d'où l'estimation.

2) Etudions maintenant le comportement asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{x}_n - x_\mu)$. On a :

$$D_x F_n(\hat{x}_n) = 0 = D_x F_n(x_\mu) + (D_{xx} F_n(x_\mu), \hat{x}_n - x_\mu) + \epsilon_n$$

avec

$$E |\epsilon_n| \leq k E |\hat{x}_n - x_\mu|^2 \leq \frac{k_1}{n} \quad (19)$$

Il vient alors :

$$\hat{x}_n - x_\mu = D_{xx} F_n(x_\mu)^{-1} D_x F_n(x_\mu) + \epsilon'_n$$

et donc :

$$\sqrt{n}(\hat{x}_n - x_\mu) = D_{xx} F_n(x_\mu)^{-1} \sqrt{n} D_x F_n(x_\mu) + \sqrt{n} \epsilon'_n.$$

De (19) et de l'uniforme convexité, il vient que $\sqrt{n} \epsilon'_n$ converge dans L^1 vers 0, et donc en probabilité.

D'autre part, grâce au théorème central limite, on a :

$$\sqrt{n} D_x F_n(x_\mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} \mathcal{N}(0, Q_\mu)$$

Grâce à la loi forte des grands nombres, il vient :

$$D_{xx} F_n(x_\mu) \xrightarrow[p.s.]{} D_{xx} \bar{f}_\mu(x_\mu)$$

Et donc le théorème en découle en utilisant th. 4.1 Billingsley [8].

2.3.2 – Méthode du second ordre

a) *Le gain matriciel* : on appellera méthode du second ordre une méthode du type

$$x_{n+1} = x_n - A_n D_x f(\omega_n, x_n) \quad (20)$$

où A_n est une suite de matrices, ceci par analogie avec la méthode de Newton dans le cas déterministe

$$x_{n+1} = x_n - D_{xx} f(x_n)^{-1} D_x f(x_n)$$

Dans ce paragraphe, nous montrons que la vitesse asymptotique optimale du théorème 3 est atteinte par une méthode du second ordre au moins dans le cas où la fonction à minimiser est quadratique

$$f(x, \omega) = \frac{1}{2} x B x - b x + \omega x$$

où ω est une variable aléatoire centrée, de loi μ , admettant un moment d'ordre 2. (20) s'écrit, dans ce cas particulier :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - A_n (B x_n - b + \omega_n) \\ x_\mu &= B^{-1} b \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_\mu &= (x_n - B^{-1} b) - A_n (B x_n - b) + A_n \omega_n \\ x_{n+1} - x_\mu &= (I - A_n B) (x_n - x_\mu) + A_n \omega_n \end{aligned} \quad (22)$$

Et donc en notant $R_n = E(x_n - x_\mu)^{\otimes 2}$, on a la relation de récurrence :

$$R_{n+1} = (I - A_n B) R_n (I - A_n B)' + A_n Q A_n' \quad (21)$$

Q désigne la covariance du bruit $Q = E_\mu \omega_n^{\otimes 2}$. (21) peut se réécrire en utilisant le fait que c'est une expression quadratique en A_n

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= A_n (B R_n B + Q) A_n - A_n B R_n - R_n B A_n' + R_n \\ &= (A_n - R_n B (B R_n B + Q)^{-1}) (B R_n B + Q) (A_n - R_n B (B R_n B + Q)^{-1})' \\ &\quad + R_n - R_n B (B R_n B + Q)^{-1} B R_n \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} R_{n+1} &\geq R_n - R_n B (B R_n B + Q)^{-1} B R_n \\ R_{n+1} &\geq R_n (R_n + B^{-1} Q B^{-1})^{-1} (R_n + B^{-1} Q B^{-1} - R_n) \\ R_{n+1} &\geq R_n (R_n + B^{-1} Q B^{-1})^{-1} B^{-1} Q B^{-1} \end{aligned}$$

En notant $Q_1 = B^{-1}QB^{-1}$

$$R_{n+1} \geq R_n (R_n + Q_1)^{-1} Q_1$$

$$R_{n+1}^{-1} \leq Q_1^{-1} (R_n + Q_1) R_n^{-1}$$

$$R_{n+1}^{-1} \leq Q_1^{-1} + R_n^{-1}$$

et donc :

$$R_n^{-1} = nBQ^{-1}B + R_0^{-1}$$

$$R_n = [nBQ^{-1}B + R_0^{-1}]^{-1}$$

et le gain optimal est donné par :

$$\begin{aligned} A_n &= R_n B (BR_n B + Q)^{-1} \\ &= R_n B ((B + QB^{-1}R_n^{-1})R_n B)^{-1} \\ &= (B + QB^{-1}R_n^{-1})^{-1} \\ &= ((n+1)B + QB^{-1}R_0^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

On a donc le résultat suivant :

THEOREME 5 : L'algorithme :

$$x_{n+1} = x_n - A_n D_x f(\omega_n, x_n) \quad \text{où : } A_n = ((n+1)B + QB^{-1}R_0^{-1})^{-1}$$

atteint la vitesse de convergence optimale $1/n B^{-1}QB^{-1}$ au moins dans le cas quadratique :

$$f(x, \omega) = \frac{1}{2} xBx - bx + \omega x, \quad E(\omega) = 0, \quad E(\omega^{\otimes 2}) = Q.$$

Remarque : On voit que la vitesse de convergence optimale est obtenue avec la méthode du second ordre, mais que le gain par rapport à la méthode avec pas scalaire est faible. Alors que dans le cas déterministe, on passe d'une vitesse du type k^{2n} , $|k| < 1$, à une vitesse k^n ici on passe d'une méthode en k/\sqrt{n} à une méthode en k'/\sqrt{n} et même le gain sur la constante est faible. Précisons cela : La vitesse optimale est :

$$\frac{tr}{n} (D_{xx} \bar{f}_\mu(x_\mu)^{-1} Q_\mu D_{xx} \bar{f}_\mu(x_\mu)^{-1}) \simeq tr \frac{Q_\mu}{c^2 n} \simeq \frac{q^2}{c^2 n}$$

tr désigne la trace d'une matrice.

c désigne ici la plus petite valeur propre de $D_{xx} \bar{f}_\mu(x_\mu)$.

En fait, la vitesse de convergence des deux méthodes est la même dans la direction où la vitesse de convergence est plus faible.

Par contre, le coût converge un peu plus vite

$$E(D_{xx} \bar{f}(x) x_n - x_\mu, x_n - x_\mu) = tr Q_\mu D_{xx} \bar{f}_\mu(x_\mu)^{-1}$$

et donc la méthode du second ordre conduit à une vitesse $tr Q_\mu / cn$ alors que la méthode du gradient stochastique donne $\chi q^2 / cn$ où χ désigne le conditionnement de la matrice $D_{xx} \bar{f}_\mu(x_\mu)$

b) *Le théorème de séparation :* En notant $z_n = x_n - x_\mu$, (22) devient :

$$z_{n+1} = z_n - A_n B z_n + A_n \omega_n$$

En posant $y_n = Bz_n - \omega_n$, $U_n = A_n y_n$, on a :

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n - U_n \\ y_{n+1} = Bz_{n+1} - \omega_{n+1} \end{cases} \quad (23)$$

On est dans la situation d'un système dynamique linéaire avec observation bruitée, et commandé.

On peut alors se donner un critère, par exemple $E \sum_{n=1}^N |z_n|^2$ que l'on veut minimiser par rapport à U_n où les U_n sont astreints à être fonction du passé des observations (les gradients passés bruités).

Ce problème est un problème classique de la commande stochastique dont la solution est donnée par le théorème de séparation Wonham [15]. La solution est :

$$\begin{cases} U_n = \hat{z}_n \\ \hat{z}_{n+1} = A_n y_{n+1} \\ A_n = R_{n-1} B (B R_{n-1} B + Q)^{-1} \\ R_n = R_{n-1} - R_{n-1} B (B R_{n-1} B + Q)^{-1} B R_{n-1} \end{cases} \quad (24)$$

On obtient ainsi le même algorithme que celui obtenu au paragraphe précédent.

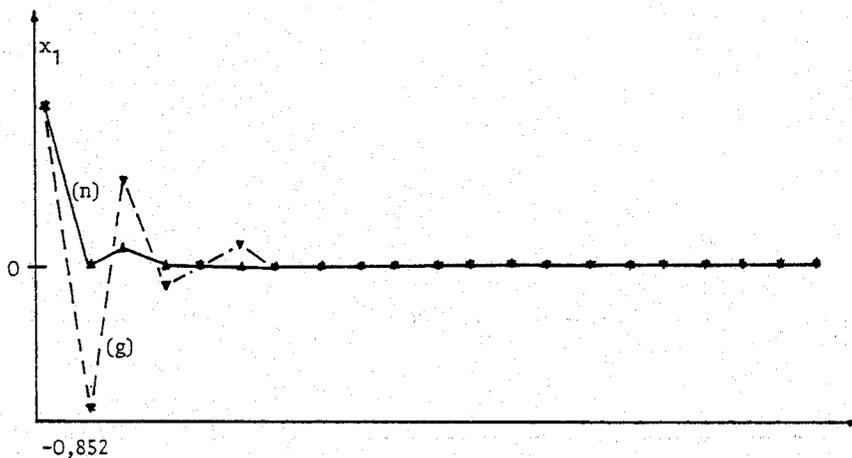
c) *Comparaison des méthodes du premier ordre et du second ordre sur des exemples numériques simples.*

$$f = 3x_2^2 + s_2 x_2 + x_1 x_2 + x_1^2 + s_1 x_1$$

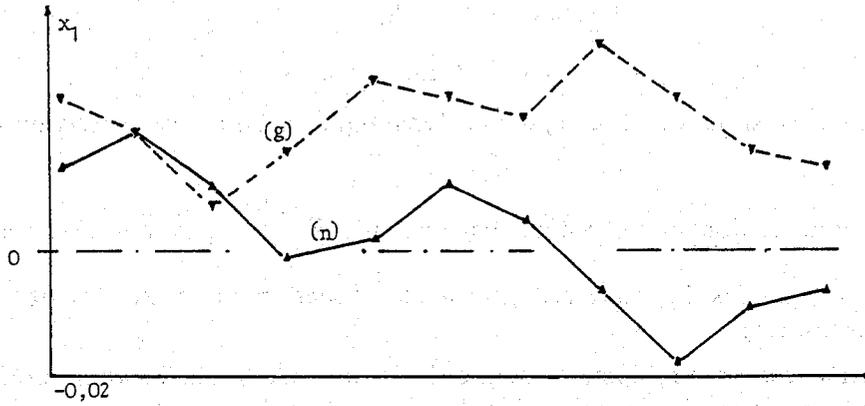
Comparaison méthodes du second ordre et premier ordre avec $a_n = 1/cn$ optimal.

n = Newton

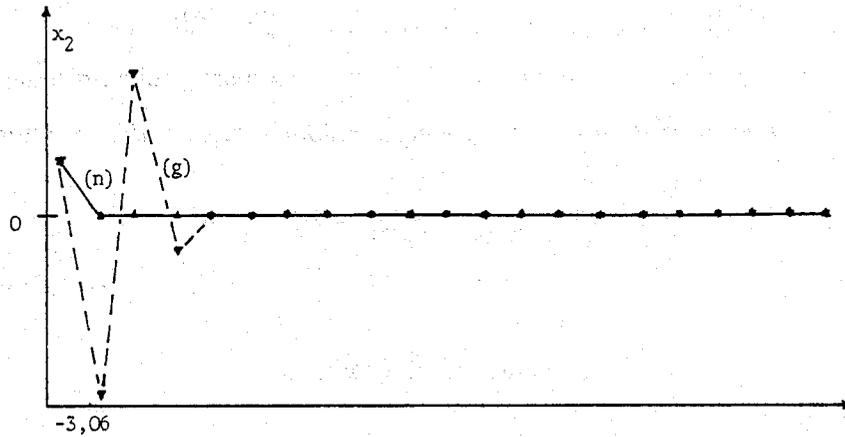
g = gradient stochastique.



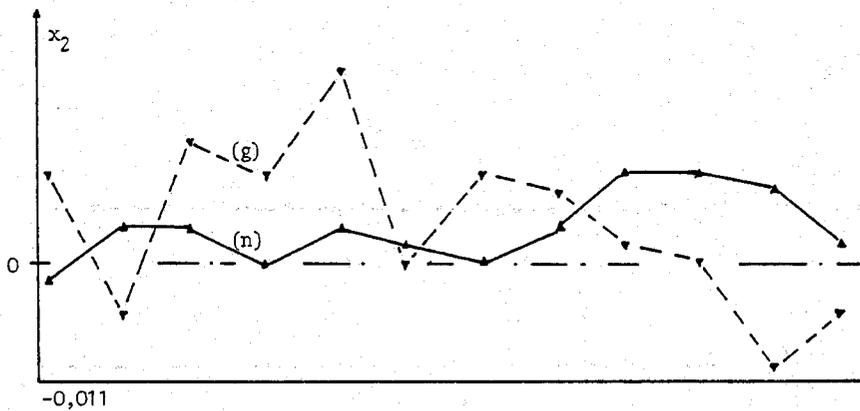
Itérations 1,21



Itérations 10,21 avec changement d'échelle



Itérations 1,21

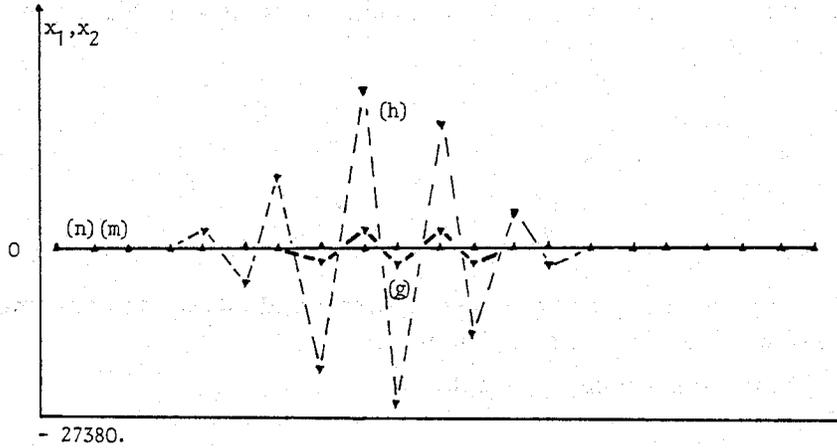


Itérations 10,21 avec changement d'échelle.

d) Comparaison des méthodes du second et premier ordre (un exemple mal conditionné).

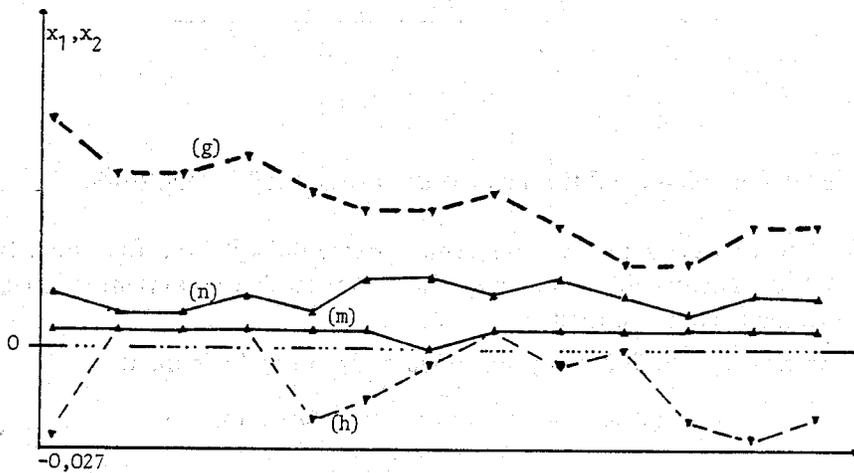
$$f = x_1^2 + 15x_2^2 + s_1x_1 + 2s_2x_2 + 3x_1x_2$$

s_1 et s_2 loi uniforme sur $[-1/2, 1/2]$.



Les 21 premières itérations.

Les valeurs propres de la Hessienne sont: $16 + \sqrt{205} \sim 30$ et $16 - \sqrt{205} \sim 1,7$
 $x_1 = n, x_2 = m$ pour la méthode de Newton; $x_1 = g; x_2 = h$ par la méthode du gradient stochastique pour $a_n = 1/cn$, c étant la plus petite v.p. de la Hessienne de f .



Les itérations de 19 à 31 et changement d'échelle.

Condition initiale : $x_1 = 1, x_2 = 1$

Remarque : On voit que le gradient stochastique est instable dans les premières itérations lorsqu'on prend le pas scalaire optimal $a_n = 1/cn$, c étant la plus petite valeur propre de la Hessienne.

Pour éviter ce phénomène, on peut faire la remarque suivante : remplaçons l'hypothèse (2) par :

$$\sup_{g \in D_x f} \mathbf{E} |g|^2 \leq k |x - x_\mu|^2 + q$$

On a alors la majoration avec $y_n = \mathbf{E} |x_n - x_\mu|^2$

$$y_{n+1} \leq y_n(1 - 2c a_n^2 + k a_n^2)$$

Le gain optimal devient :

$$a_n = \frac{c y_n}{q + k y_n}$$

Si l'on part d'un point initial loin de l'optimum, q est négligeable devant y_n et donc :

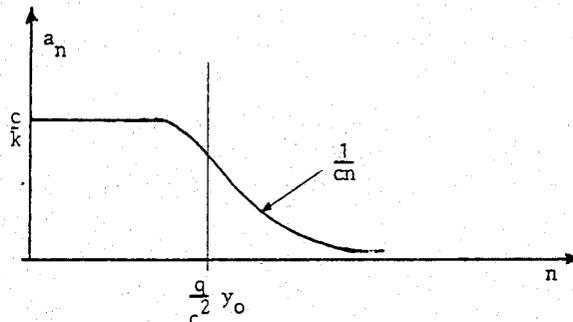
$$a_n = \frac{c}{k}$$

la convergence est alors exponentielle :

$$y_{n+1} \leq y_n \left(1 - \frac{c^2}{k}\right)$$

Lorsque y_n est proche de 0, environ après $q y_0 / c^2$ itérations, a_n doit se comporter comme $a_n = c y_n / q$ et les résultats du Théorème 1 s'appliquent.

Une bonne façon de faire évoluer a_n est donc :



2.4 – Le cas du problème bien conditionné avec un bruit de faible amplitude

On montre dans ce paragraphe un théorème énoncé dans Polyak [3] sans démonstration, dans lequel on donne des situations dans lesquelles la méthode du gradient stochastique atteint une vitesse de convergence exponentielle.

On fait l'hypothèse (1) du § 2.2, les hypothèses (2) et (3) deviennent :

$$|g(x, \omega) - \bar{g}(x)| \leq v < c \quad \forall x, \forall \omega \quad (2')$$

$$\bar{g}(x) = \int g(x, \omega) \mu(d\omega)$$

$$|\bar{g}(x)| \leq q \quad \forall x \quad (2'')$$

$$\bar{f}(x) - \bar{f}^* \geq c \ell(x) \quad (3')$$

Si m_x désigne la projection de x sur $\text{Argmin } \bar{f}$, on a :

$$\begin{aligned} (g(x, \omega), x - m_x) &= (\bar{g}(x), x - m_x) + (g(x, \omega) - \bar{g}(x), x - m_x) \\ &\geq \bar{f}(x) - \bar{f}(m_x) - v |x - m_x| \\ &\geq (c - v) |x - m_x| \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{(g(x, \omega), x - m_x)}{|g(x, \omega)| |x - m_x|} \geq \frac{c - v}{v + q} = \theta$$

Et donc, quel que soit ω , $-g(x, \omega)$ est une direction qui nous rapproche de l'optimum. On utilisera la variante suivante de l'algorithme de gradient stochastique

$$x_{n+1} = x_n - a_n \frac{g(x_n, \omega_n)}{|g(x_n, \omega_n)|} \quad (25)$$

On a alors la majoration :

$$\ell^2(x_{n+1}) \leq \ell^2(x_n) - 2a_n \theta \ell(x_n) + a_n^2. \quad (26)$$

THEOREME 6 : Goffin [9].

Etant donnée la suite a_n définie par $a_n = A a^n$ avec $A > 0$, $0 < a < 1$, le comportement asymptotique de l'algorithme (25) en fonction des valeurs de a , A et de la distance à l'optimum du point de départ est donnée par :

$$a \geq a_\theta, \quad \ell(x_0) \in [\hat{\ell}, \check{\ell}] \Rightarrow \ell(x_n) \leq \ell(x_0) a^n$$

$$a \geq a_\theta, \quad \ell(x_0) \leq \hat{\ell} \Rightarrow \ell(x_n) \leq \hat{\ell} a^n$$

$$a < a_\theta \text{ ou } \ell(x_0) > \check{\ell} \Rightarrow \text{pas de convergence vers l'optimum}$$

avec

$$a_\theta = \begin{cases} \sqrt{1-\theta^2} & \text{si } \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2\theta} & \text{si } \theta > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\hat{\ell} = A \max \left\{ \frac{1}{a}, \frac{\theta - \sqrt{\theta^2 - (1-\theta^2)}}{1-\theta^2} \right\}$$

$$\check{\ell} = A \frac{\theta + \sqrt{\theta^2 - (1-\theta^2)}}{1-\theta^2}$$

Démonstration

On va supposer que $\ell(x_n) \leq L a^n$ et trouver des conditions pour que $\ell(x_{n+1}) \leq L a^{n+1}$. D'après (26), on a :

$$\ell^2(x_{n+1}) \leq a^{2n} (L^2 - 2A\theta L + A^2)$$

On aura $\ell^2(x_{n+1}) \leq L'^2 a^{2n+2}$ si $\forall 0 \leq L \leq L'$ on a :

$$L^2 - 2A\theta L + A^2 \leq L'^2 a^2 \quad (27)$$

Pour cela, il suffit que (27) soit vérifiée en $L = 0$ et $L = L'$, d'où les inégalités :

$$A^2 \leq L'^2 a^2$$

$$L'^2 (1 - a^2) - 2A\theta L' + A^2 \leq 0$$

En posant $k = L'/A$, il faut donc que

$$\begin{cases} ka \geq 1 \\ k^2 (1 - a^2) - 2\theta k + 1 \leq 0 \\ \ell(x_0) \leq kA \end{cases} \quad (28)$$

Si $a < \sqrt{1 - \theta^2}$, (28) n'a pas de solution ; par ailleurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} k^2 (1 - a^2) - 2\theta k + 1 \leq 0 \text{ si} \\ \frac{\theta - \sqrt{\theta^2 - (1 - a^2)}}{1 - a^2} \leq k \leq \frac{\theta + \sqrt{\theta^2 - (1 - a^2)}}{1 - a^2} \\ a \geq \sqrt{1 - \theta^2} \end{array} \right. \quad (29)$$

On aura également $ka \geq 1$ si $\frac{\theta + \sqrt{\theta^2 - (1 - a^2)}}{1 - a^2} \geq 1/a$, donc si

$$a\sqrt{\theta^2 - (1 - a^2)} \geq 1 - a^2 - a\theta$$

Pour cela, il suffit que l'on ait soit :

$$1 - a^2 - a\theta \leq 0 \Rightarrow a \geq 1/2 (-\theta + \sqrt{\theta^2 + 4}) \quad (30)$$

soit :

$$a^2 (\theta^2 - 1 + a^2) \geq (1 - a^2 - a\theta)^2 \Rightarrow a \geq 1/2\theta \quad (31)$$

On vérifie alors que (29), (30), (31) $\Leftrightarrow a \geq a_\theta$.

Supposons maintenant que $a \geq a_\theta$ et montrons alors que $\forall k \in [\hat{l}, \check{l}]$ est solution. Pour cela, il reste à vérifier la condition initiale $\ell(x_0) \leq Ak$ c.à.d $\ell(x_0) \leq L'$ pour $\forall L' \in [\hat{l}, \check{l}]$ ce qui donne les dernières conditions du théorème.

III – OPTIMISATION DES INVESTISSEMENTS PAR LA METHODE DU GRADIENT STOCHASTIQUE DANS LE CAS “CONTINU”

On distinguera deux cas :

- 1) on optimise seulement les capacités de transport.
- 2) on optimise les capacités de transport et les moyens de production.

3.1 – Optimisation des capacités de transport

Dans ce cas, on néglige les indisponibilités des moyens de transport et on se place dans le cas statique. En remarque, on indiquera brièvement la méthode dans le cas dynamique.

Le problème indiqué au §1 se réécrit :

$$Aq(\omega) = 0 \quad (1)$$

$$|q_j(\omega)| \leq Q_j \quad \forall j \in T \quad (2)$$

$$0 \leq q_j(\omega) \leq \check{q}_j(\omega) \quad \forall j \in G \quad (3)$$

où les $\check{q}_j(\omega)$ sont des variables aléatoires de loi donnée.

$\check{q}_j(\omega)$ est une variable aléatoire représentant la disponibilité du groupe j , c'est une variable aléatoire prenant les valeurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ avec la probabilité } 1 - \gamma_j \\ Q_j \text{ avec la probabilité } \gamma_j \end{array} \right.$$

où γ_j est le taux de panne du groupe de production.

$\check{q}_j(\omega)$, $j \in D$ est tirée au sort selon la loi de probabilité associée à la courbe de charge selon la remarque du paragraphe I.

On veut résoudre :

$$\text{Min}_{\check{Q}_j \leq Q_j \leq \hat{Q}_j} \sum_{j \in T} C_j(Q_j) + \mathbf{E} \text{Min}_{\substack{q_j(\omega) \\ j \in GTD}} \sum_{j \in GD} c_j(q_j(\omega)) \quad (4)$$

(1)
(2)
(3)

\hat{Q}_j représente le réseau existant

\check{Q}_j représente une limite physique sur la capacité des couloirs où sont implantées les lignes haute tension.

$C_j(Q_j)$ sera linéaire et représente le coût d'investissement.

$c_j(q_j(\omega))$, $j \in G$ représente le coût de production et sera pris linéaire.

$c_j(q_j(\omega))$, $j \in D$ sera linéaire décroissant et représente le gain associé à la vente de $q_j(\omega)$.

Si l'on désigne par :

$$\phi(Q, \omega) = \text{Min}_{\substack{q_j(\omega), j \in GTD \\ (1) \\ (2) \\ (3)}} \sum_{j \in GD} c_j(q_j(\omega)) \quad (5)$$

l'application $Q \rightarrow \phi(Q, \omega)$ est convexe non différentiable.

Un élément de $D_Q \phi$ est obtenu comme le multiplicateur associé aux variables en butée sur les contraintes. On l'obtient aisément puisque (5) est la résolution d'un problème de flot, pour laquelle on utilise l'algorithme de Maurras [10]. On applique ensuite la méthode du gradient stochastique au problème :

$$\text{Min}_{\check{Q}_j \leq Q_j \leq \hat{Q}_j} \sum_{j \in T} C_j(Q_j) + \mathbf{E} \phi(Q, \omega)$$

On est donc dans le cas convexe non différentiable et on sait calculer un élément du sous différentiel de $C_j(Q_j) + \phi(Q, \omega)$.

Résultats numériques

On compare les résultats obtenus pour le réseau agrégé français 400 KV, 48 nœuds, 82 sommets, 185 groupes de production.

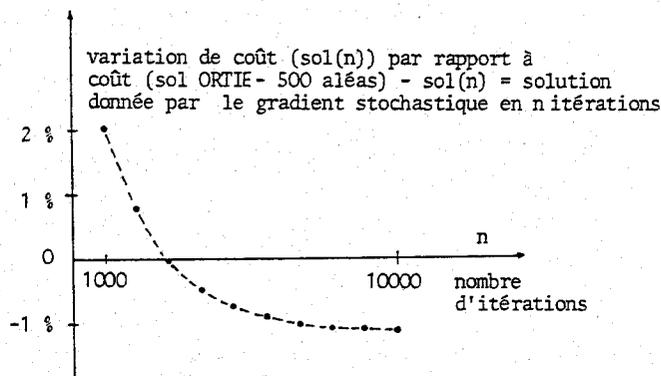
Pour pouvoir comparer avec la méthode précédemment employée par Dodu [11], on fait la simplification suivante :

Les coûts de production sont nuls, mais on se donne comme moyens de production les groupes disponibles les moins chers, tels que la capacité totale de production soit égale à la demande si les moyens sont suffisants, sinon, on se donne toutes les capacités de production disponibles.

D'autre part, on étudie le réseau aux seules heures de pointe. Dans ce cas la demande est constante.

Les résultats sont donc comparés à ceux du modèle ORTIE, basés sur un tirage de 500 aléas.

La courbe suivante indique la vitesse de convergence de l'algorithme, 15 000 itérations représentent ici 5 mn sur un ordinateur IBM 370/168, la solution du modèle ORTIE a demandé 15 mn sur IBM 370/168. Le coût optimal obtenu par cette dernière méthode est donné en traits pleins.



A précision égale un gain de 15 est obtenu en temps de calcul.

Remarque : Le problème dynamique.

Dans le cas où l'on veut étudier le problème dynamique en utilisant la définition précédente de la fonction ϕ , on veut minimiser

$$\text{Min}_U \sum_{s=1}^S \left[\sum_{j \in T} C_j(U_j^s) + \mathbf{E} \phi_s(Q^s, \omega) \right] \beta^s \quad (6)$$

$$Q_j^{s+1} = Q_j^s + U_j^{s+1}, \quad Q_j^0 \text{ donné}, \quad s \in [0, S-1] \quad (7)$$

$$0 \leq U_j^s, \quad s \in [1, S] \quad (8)$$

On néglige la contrainte de couloir $Q_j^s \leq \bar{Q}_j^s, j \in T$; (6), (7), (8) peut être vu comme un problème de commande optimale déterministe. Le gradient se calcule alors simplement en utilisant l'état adjoint

$$\begin{cases} -\lambda_j^s = -\lambda_j^{s+1} + D_{Q_j^s} \phi_{s+1}(Q^{s+1}, \omega) \beta^{s+1}, & s \in [0, S-1] \\ \lambda_j^S = 0 \end{cases}$$

Un sous-gradient s'écrit alors :

$$D_{U_j^s} J(U, \omega) = \beta^s D_{U_j^s} C_j(U_j^s) - \lambda_j^{s-1}(\omega)$$

avec

$$J(U, \omega) = \sum_{s=1}^S \left[\sum_{j \in T} C_j(U_j^s) + \phi_s(Q^s, \omega) \right] \beta^s$$

On peut alors appliquer sans changement la méthode du gradient stochastique.

Le gain en temps de calcul par rapport à ORTIE permet d'envisager la résolution du problème dynamique en un temps plus raisonnable. En effet, le coût du calcul du gradient croît linéairement avec le nombre de pas en temps. La vitesse de convergence de la méthode du gradient stochastique est liée au conditionnement du problème et non pas à la dimension du système.

3.2. Optimisation des capacités de transport et de la localisation des moyens de production

On étudie ici le problème statique (un pas de temps dans la formulation du paragraphe I), le passage au problème dynamique peut se faire comme dans la remarque précédente.

La disponibilité du réseau sera pris en compte en supposant que :

$$\check{q}_j(Q_j, \omega) = Q_j \eta_j(\omega)$$

La puissance pouvant transiter dans un arc de transport $j \in T$, est proportionnelle à la capacité de la ligne Q_j , le coefficient de proportionnalité $0 \leq \eta_j(\omega) \leq 1$ étant une variable aléatoire représentant sa disponibilité. Par exemple, supposons que l'arc $j \in T$ soit associé à une seule ligne physique alors $\eta_j(\omega)$ sera une variable aléatoire prenant les valeurs 0 avec la probabilité $1 - \gamma_j$, et 1 avec la probabilité γ_j ; si à $j \in T$ correspond plus qu'une ligne physique $\eta_j(\omega)$ pourra être une somme de variables de Bernoulli.

Pour les systèmes de production $j \in G$, on prendra un modèle analogue pour représenter les indisponibilités, $q_j(Q_j, \omega) = Q_j \eta_j(\omega)$. Les arcs $j \in G$ représenteront un ensemble de production de même type (nucléaire, thermique classique, turbine à gaz), $\eta_j(\omega)$ sera une v.a. à support discret dans l'intervalle $[0, 1]$; par exemple si j représente un site nucléaire à 4 tranches :

$$\eta_j = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} X_j^i$$

où les X_j^i sont des v.a. de Bernoulli prenant la valeur 0 avec la probabilité $1 - \gamma$ et 1 avec la probabilité γ .

Le problème consiste alors à minimiser :

$$\text{Min}_{\check{Q}_j \leq Q_j \leq \check{Q}_j} \sum_{j \in TG} C_j(Q_j) + \mathbf{E} \text{Min}_{\substack{q_j(\omega) \\ j \in GTD}} \sum_{j \in GD} c_j(q_j(\omega)) \quad (9)$$

$$Aq(\omega) = 0 \quad (10)$$

$$|q_j(\omega)| \leq \eta_j(\omega) Q_j \quad j \in T \quad (11)$$

$$0 \leq q_j(\omega) \leq \eta_j(\omega) Q_j \quad j \in G \quad (12)$$

$$0 \leq q_j(\omega) \leq \check{q}_j(\omega) \quad j \in D \quad (13)$$

$$\sum_{j \in G_k} Q_j = b_k \quad (14)$$

La contrainte (14) indique une contrainte de budget attachée à chaque type de production $\cup_k G_k = G$. L'indice k désigne une source de production particulière (nucléaire, thermique classique, turbine à gaz etc.).

b_k représente alors une contrainte de budget global associée à un moyen de production donné.

Remarque : La disponibilité représentée par $\eta_j(\omega) Q_j$ est évidemment une approximation puisqu'en réalité la v.a. est de la forme :

$$\check{q}_j(\omega) = Q_j^k \sum_{k=1}^{K_j} X_j^k(\omega)$$

où Q_j^k désigne la capacité d'un groupe.

$X_j^k(\omega)$ est une v.a. représentant le fonctionnement ou non d'un groupe.

K_j devrait être la variable à optimiser alors qu'ici K_j est fixé et on optimise par rapport à Q_j .

Cette approximation nous est imposée si l'on veut formuler un problème dans lequel les variables à optimiser sont à valeurs continues.

IV – LES VARIABLES D'INVESTISSEMENT SONT A VALEURS DANS UN ENSEMBLE DISCRET

Dans ce paragraphe, nous étudions le problème énoncé au § III.1 dans lequel les variables d'investissements sont à valeurs entières, c.à.d. :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{u_j \in \mathbf{N}} \sum_{j \in T} C_j(Qu_j) + \mathbf{E} \text{Min}_{\substack{q_j(\omega) \\ (1) \\ (2) \\ (3)}} c_j(q_j, \omega) \\ \\ Aq(\omega) = 0 \\ \\ |q_j(\omega)| \leq Qu_j \quad j \in T, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \Omega \text{ ensemble discret} \\ \\ 0 \leq q_j(\omega) \leq \check{q}_j(\omega) \quad j \in GD \end{array} \right. \quad (1)$$

Q est un nombre donné représentant la capacité d'une ligne.

4.1 – Condition pour que la solution du problème (1), $u_j \in \mathbf{R}^+$, soit entière

On a le résultat :

THEOREME 7 : Si les variables aléatoires q_j , $j \in DG$ ont leur support dans l'ensemble $\{nQ, n \in \mathbf{N}\}$, si les coûts C_j et c_j sont rationnels, alors la solution de (1) pour $u_j \in [\hat{u}_j, \check{u}_j]$ où \hat{u}_j et $\check{u}_j \in \mathbf{N}$ est entière.

Démonstration

On peut réécrire (1) sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{u_j, v_j^\omega} \sum_{j \in T} C_j(u_j) + \sum_{j \in GD} \sum_{\omega \in \Omega} c_j(v_j^\omega) \mu^\omega \quad u \text{ entier} \\ \\ Av^\omega = 0 \\ \\ 0 \leq |v_j^\omega| \leq u_j, \quad j \in T, \quad \omega \in \Omega \\ \\ 0 \leq v_j^\omega \leq \check{v}_j^\omega, \quad j \in GD \end{array} \right. \quad (2)$$

On a fait le changement de variable $q_j^\omega = Qv_j^\omega$ et on a utilisé la linéarité de c et de C . μ^ω désigne la probabilité de l'événement ω .

Pour démontrer le résultat, il suffit de prouver que la matrice des contraintes de (2) est totalement unimodulaire puisque dans cette formulation toutes les données sont entières. Or, cette matrice notée B , a la structure suivante :

IV – LES VARIABLES D'INVESTISSEMENT SONT A VALEURS DANS UN ENSEMBLE DISCRET

Dans ce paragraphe, nous étudions le problème énoncé au § III.1 dans lequel les variables d'investissements sont à valeurs entières, c.à.d. :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{u_j \in \mathbf{N}} \sum_{j \in T} C_j(Qu_j) + \mathbf{E} \text{Min}_{\substack{q_j(\omega) \\ (1) \\ (2) \\ (3)}} c_j(q_j, \omega) \\ \\ Aq(\omega) = 0 \\ \\ |q_j(\omega)| \leq Qu_j \quad j \in T, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \Omega \text{ ensemble discret} \\ \\ 0 \leq q_j(\omega) \leq \check{q}_j(\omega) \quad j \in GD \end{array} \right. \quad (1)$$

Q est un nombre donné représentant la capacité d'une ligne.

4.1 – Condition pour que la solution du problème (1), $u_j \in \mathbf{R}^+$, soit entière

On a le résultat :

THEOREME 7 : Si les variables aléatoires q_j , $j \in DG$ ont leur support dans l'ensemble $\{nQ, n \in \mathbf{N}\}$, si les coûts C_j et c_j sont rationnels, alors la solution de (1) pour $u_j \in [\hat{u}_j, \check{u}_j]$ où \hat{u}_j et $\check{u}_j \in \mathbf{N}$ est entière.

Démonstration

On peut réécrire (1) sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{u_j, v_j^\omega} \sum_{j \in T} C_j(u_j) + \sum_{j \in GD} \sum_{\omega \in \Omega} c_j(v_j^\omega) \mu^\omega \quad u \text{ entier} \\ \\ Av^\omega = 0 \\ \\ 0 \leq |v_j^\omega| \leq u_j, \quad j \in T, \quad \omega \in \Omega \\ \\ 0 \leq v_j^\omega \leq \check{v}_j^\omega, \quad j \in GD \end{array} \right. \quad (2)$$

On a fait le changement de variable $q_j^\omega = Qv_j^\omega$ et on a utilisé la linéarité de c et de C . μ^ω désigne la probabilité de l'événement ω .

Pour démontrer le résultat, il suffit de prouver que la matrice des contraintes de (2) est totalement unimodulaire puisque dans cette formulation toutes les données sont entières. Or, cette matrice notée B , a la structure suivante :

4.2 - Le problème déterministe est NP complet

On appelle problème déterministe la situation du 4.1 dans laquelle $\text{card}(\Omega) = 1$ c.à.d. il y a un seul aléa. Dans ce cas, le problème est du type :

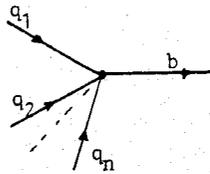
$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Min}_{q,u} du + cq & u \text{ entier} \\ Aq = b, q \geq 0 & , A \text{ matrice d'incidence de graphe} \\ 0 \leq q_j \leq a_j u_j & a_j \text{ entier} \geq 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

On montre que si l'on sait résoudre (4), on sait résoudre le problème du sac à dos unidimensionnel et donc que (4) est NP complet.

Le problème du sac à dos unidimensionnel consiste à montrer l'existence d'une solution à :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i x_i &= b \\ x_i &= \{0,1\} \end{aligned} \quad (5)$$

Pour cela, on considère le graphe :



$$q_i \leq a_i u_i$$

et on résout grâce à (4) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} y = \min_{q,u} \sum a_i u_i & u \text{ entier} \\ \sum q_i = b \\ q_i \leq a_i u_i \\ y \geq \sum q_i = b \end{array} \right.$$

et donc savoir si (5) admet une solution revient à savoir si $y = b$, et donc la résolution (4) permet de résoudre la question, et puisque le problème du sac à dos unidimensionnel est NP complet, (4) est NP complet.

THEOREME 8 : *Le problème déterministe (4) est NP complet et donc le problème stochastique l'est a fortiori.*

Ce résultat négatif nous indique qu'a priori le problème est difficile et que les seules méthodes actuellement disponibles sont du type branch and bound ou des heuristiques.

4.3 - Discussion des méthodes Branch and Bound

Christophides [13] résout le problème déterministe par une méthode branch and bound. Il lui faut plus de 5 mn de CDC 6600 pour résoudre un problème de taille bien inférieure à l'exemple traité dans le § III, ceci pour une réalisation des aléas. Le problème stochastique avec 500 réalisations (même si on arrivait à adapter l'algorithme) nécessiterait donc un temps prohibitif.

Gondran, Minoux [14] donne des temps de calcul pour minimiser une forme quadratique sur les entiers de l'hypercube $[0,1]^{40}$ par des méthodes du type branch and bound. Il donne des temps de calcul de l'ordre de 5 mn sur IBM 370/168. Or, notre problème est en dimension 82, mais n'est pas une forme quadratique à minimiser. On peut imaginer les temps de calcul qu'il faudrait pour résoudre notre problème. Cette voie est exclue. Il reste donc des heuristiques donnant des solutions pas trop mauvaises.

Il apparaît d'autre part que l'arrondi de la solution continue à l'entier le plus proche double approximativement le coût du minimum continu. Nous proposons maintenant 3 heuristiques, dont la meilleure conduit à une solution à 8 % du minimum continu en un temps très court. Ces méthodes sont toutes basées sur les idées du gradient stochastique.

4.4 – Heuristiques basées sur le gradient stochastique

4.4.1 – Le gradient stochastique calculé à l'entier le plus proche

Soit à minimiser $Ef(x)$, x entier. On utilise l'algorithme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n - aD_x f([x_n], \omega_n), \quad x \in \mathbf{R}^m \\ a > 0 \\ [x_n] \text{ entier le plus proche de } x_n \\ \omega_n \text{ } n\text{-ième tirage des aléas.} \end{array} \right. \quad (6)$$

Alors $[x_n]$ ne converge pas, mais évolue sur un certain nombre de points récurrents.

Supposons que les points récurrents forment un hypercube noté $[0,1]^m$. Notons $p_i^1 =$ la fréquence de passage de la composante $[x_n]_i$ en 1 et p_i^0 celle du passage en 0.

On classe les composantes par ordre des fréquences décroissantes q_i , $q_i = \sup(p_i^1, p_i^0)$. On fixe disons les r premières composantes à la valeur $\text{Argmax}_i (p_i^0)$ c.à.d à la coordonnée entière de plus haute fréquence.

On applique (6), on fixe à des valeurs entières par le même procédé r nouvelles coordonnées. On réitère jusqu'à ce que toutes les coordonnées soient fixées.

C'est la meilleure heuristique trouvée, elle conduit à un coût à 8 % du minimum continu obtenu en faisant 3 blocages, après 2 000 itérations de gradient chacun.

Elément de justification

Plaçons nous en dimension 1 avec f convexe et supposons le minimum de la fonction compris entre 0 et 1.

Notons :

- g_0 le gradient en 0
- g_1 le gradient en 1
- N le nombre d'itérations
- p_0 la fréquence de passage en 0
- p_1 la fréquence de passage en 1

On a :

$$|Np_0^N g_0 + Np_1^N g_1| \leq 1$$

et donc :

$$p_0^N g_0 + p_1^N g_1 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

$$\frac{|g_1|}{p_0} = \frac{|g_0|}{p_1}$$

et donc le point de fréquence la plus élevée est le point de gradient le plus faible, et donc, au moins dans le cas quadratique, le meilleur.

Ce raisonnement s'étend en dimension n à condition de raisonner sur les gradients moyens par face, cette moyenne étant au sens d'une mesure définie par la mesure ergodique associée au champ de vecteurs $D_x f([x])$.

Remarque: Cette heuristique est sans commune mesure meilleure que toutes les techniques que l'on a pu essayées, basées sur les idées du type branch and bound dans lesquelles les choix sont basés sur des évaluations par défaut du coût calculées grâce à la méthode du gradient stochastique.

4.4.2 – Tirage au sort de la variable à optimiser selon une loi que l'on adapte par la méthode du gradient stochastique

Soit à résoudre :

$$\text{Min}_{x \in \{0,1\}^m} \mathbf{E} f(x), \quad f \text{ convexe}$$

On tire au hasard x selon la loi $P = \prod_{i=1}^m P_i$ où P_i est une loi sur $\{0,1\}$, $\forall i$, telle que

$$P_i(0) = 1 - p_i$$

$$P_i(1) = p_i$$

On adapte la loi P_i en faisant varier p_i , par une méthode de gradient stochastique, de façon à converger vers un poids de 1 sur le point dont la composante du gradient est la plus petite en norme, si les gradients sont de signes opposés, sinon sur le point 0 si les deux gradients sont positifs ou 1 si les deux gradients sont négatifs.

Si on note :

$$g_i(x, \omega) = D_{x_i} f(\omega)$$

l'algorithme est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i^{n+1} = P_r \left[p_i^n - a_n \left[g_i(x^n, \omega^n) \left[\frac{\chi_1(x_i^n)}{p_i^n} + \frac{\chi_0(x_i^n)}{(1-p_i^n)} \right] \right] \right] \\ \Sigma a_n = \infty, \quad a_n \geq 0 \\ \Sigma a_n^2 < \infty. \end{array} \right. \quad (7)$$

P_r désigne la projection sur $[0,1]^m$

$\chi_A(x)$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A .

L'étude de (7) par la méthode de l'équation différentielle moyenne montre que (7) se comporte asymptotiquement (Kushner [6]), au moins dans un intervalle $[a, b]$, $a > 0$, $b < 1$, comme l'équation différentielle :

$$\dot{p}_i = \begin{cases} -\bar{g}_i^1(p) - \bar{g}_i^0(p) & \text{si } p \in]0,1[\\ -[-\bar{g}_i^1(p) - \bar{g}_i^0(p)]^- & \text{si } p = 1 \\ +[-\bar{g}_i^1(p) - \bar{g}_i^0(p)]^+ & \text{si } p = 0 \end{cases} \quad (8)$$

où

$$\bar{g}_i^1 = \mathbf{E}_{P \times \mu} [g_i(x, \omega) | x_i = 1]$$

$$\bar{g}_i^0 = \mathbf{E}_{P \times \mu} [g_i(x, \omega) | x_i = 0]$$

μ désignant ici la loi de ω .

Dans le cas de la dimension 1 :

$$\bar{g}^1(p) = \mathbf{E}g(1)$$

$$\bar{g}^0(0) = \mathbf{E}g(0)$$

et

$$p(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1 \quad \text{si } \mathbf{E}g(1) + \mathbf{E}g(0) \leq 0 \quad \text{c.à.d si}$$

$$\mathbf{E}g(1) \leq -\mathbf{E}g(0)$$

$$p(t) \rightarrow 0 \quad \text{si } \mathbf{E}g(1) + \mathbf{E}g(0) \geq 0,$$

ce qui est le résultat souhaité.

Malheureusement, même pour la dimension 2, des points d'équilibre intermédiaires sont possibles. Et la vraie pénalisation de la dimension 1 n'est pas applicable. Néanmoins, il a été possible d'obtenir une solution à 8 % du minimum continu pour l'exemple du III.1, grâce à la variante suivante de l'algorithme. On fait l'hypothèse que $\bar{g}_i^1(p) = C_i$ le coût d'investissement ; on applique l'algorithme suivant :

$$p_i^{n+1} = P_r [p_i^n - a_n [g_i(x^n, \omega^n) + C_i] \chi_0(x_i^n)]$$

qui bien qu'il se ralentisse dans le voisinage des $p_i = 0$ à l'avantage de ne pas avoir au dénominateur des valeurs pouvant s'annuler.

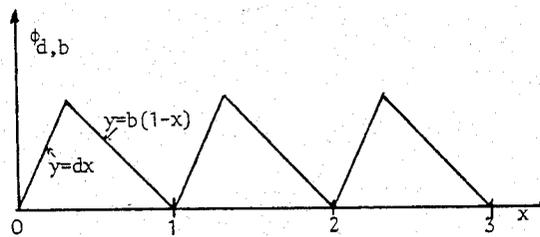
4.4.3 – La méthode de pénalisation

La méthode consiste à pénaliser les contraintes d'intégrité de façon non différentiable, d'appliquer la méthode du gradient stochastique sur le problème pénalisé et de faire évoluer la pénalisation de façon à partir de la solution continue et de réaliser progressivement les contraintes d'intégrité.

On veut résoudre :

$$\begin{cases} \text{Min } \mathbf{E}f(x) \\ x \\ x \text{ entier} \end{cases}$$

Soit $\phi_{a,b}(x)$ une fonction linéaire par morceau, ≥ 0 , nulle sur les entiers, de pente d en \mathbf{N}^+ et b en \mathbf{N}^- où \mathbf{N}^+ désigne $\{0^+, 1^+, 2^+, \dots\}$ et $\mathbf{N}^- = \{1^-, 2^-, 3^-, \dots\}$.



On applique alors la méthode du gradient stochastique à

$$\text{Min}_x \mathbf{E}f(x) + \phi_{d,b}(x)$$

Il est bien évident que le problème ainsi formulé est non convexe et qu'il a de nombreux minima locaux.

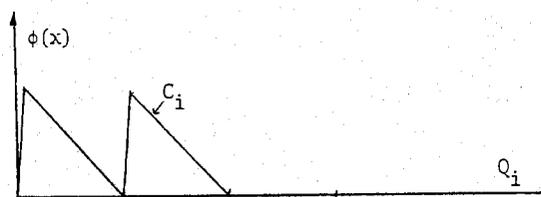
Pour appliquer cette méthode, on part de $\phi_{0,0}(x)$, puis on fait croître progressivement les pentes d, b avec les itérations du gradient stochastique.

L'algorithme est donc le suivant :

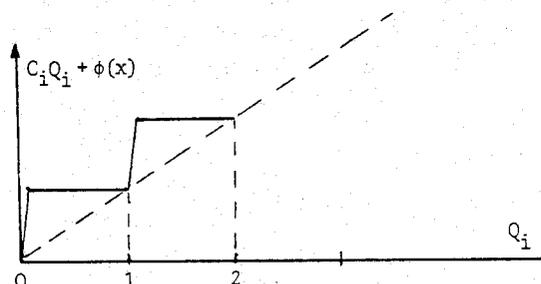
$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n - a_n D_x h(x_n, \omega_n, d_n, b_n) \\ \text{où } f(x, \omega) + \phi_{d,b}(x) \stackrel{df}{=} h(x_n, \omega_n, d_n, b_n) \\ \Sigma a_n = +\infty \\ \Sigma a_n^2 \leq \infty \\ d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d, d_n \uparrow d, d_n \geq 0 \\ b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b, b_n \downarrow b, b_n \leq 0 \end{array} \right.$$

d et b sont deux pentes nous assurant que tous les minima locaux sont entiers.

En pratique, pour l'exemple du paragraphe III, $d_n \rightarrow d$ très grand, $b_n \rightarrow b$ où b est le coût d'investissement des lignes, la pénalisation limite pour la ligne i est donc de la forme :



c.à.d que le coût d'investissement plus la pénalisation limite est de la forme :



c.à.d le coût d'investissement réel.

En partant de l'arrondi le plus proche de la solution continue cette méthode conduit à un optimum local à 11 % de la solution continue en 2 000 itérations. Ce qui fixe à peu près à 3 000 itérations le coût total, puisqu'on n'a pas besoin d'une solution continue très précise.

En fait, dans cette heuristique, on a une vue locale et la qualité du résultat dépend énormément de la déformation de la fonction à minimiser. Lorsqu'une coordonnée s'est engagée dans une mauvaise direction, il est alors peu probable qu'elle puisse revenir dans la bonne direction.

Les deux graphiques suivants donnent les résultats numériques obtenus sur l'exemple du § 3.1.

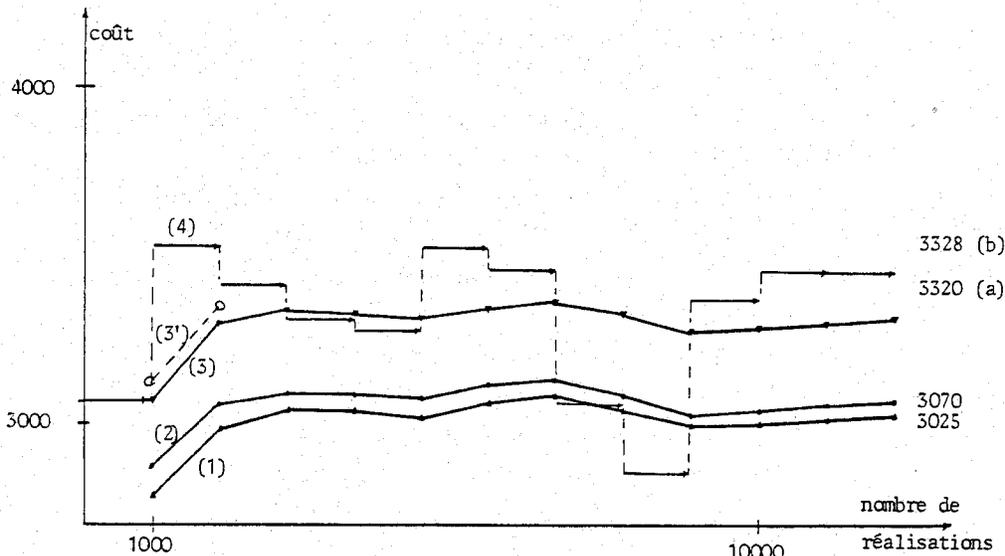


Figure 1 — Evolution du coût

- (1) ▲ Evolution du coût moyen de la solution continue obtenue par gradient stochastique sur 10 000 itérations.
- (2) ● Analogue à (1)▲ pour la solution EDF obtenue sur 500 aléas.
- (3) ▼ Courbe analogue pour la meilleure solution entière : (a) donnée par l'algorithme 4. (6), (b) donnée par 4.(7).
- (3)'○ Analogue à (3) pour la pénalisation 4.4.3.
- (4) → Coût par paquet de 1 000 aléas correspondant à (3).

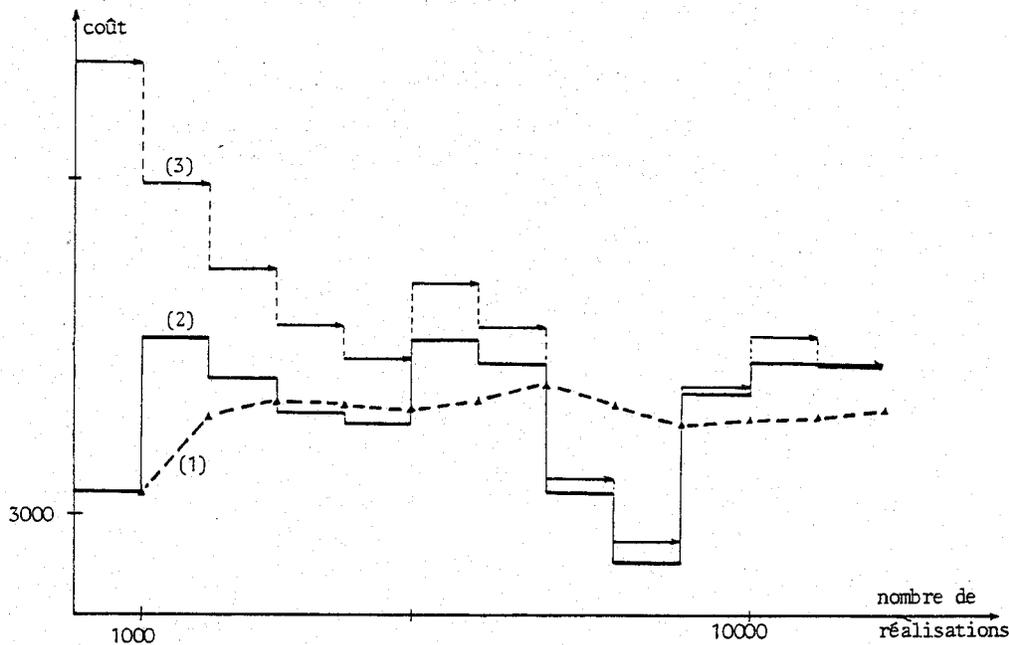


Figure 2

- (1) ▲ Courbe (3) de la figure 1
- (2) ● Courbe (4) de la figure 1
- (3) → Coût par paquet de 1 000 aléas au cours des itérations de l'algorithme 4. (7) (convergence vers (2) en 12 000 itérations).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. ROBBINS, S. MONRO. – A stochastic approximation method. *Ann. Math. Statist.*, 22, 1951, pp. 400-407.
- [2] E. KIEFER, J. WOLFOWITZ. – Stochastic estimation of the maximum of a regression function. *Ann. Math. Statist.*, 23, n° 3, 1952.
- [3] B.T. POLYAK. – Convergence and convergence rate of iterative stochastic algorithms. *Automatica i Telemekhanika*, Vol. 12, 1976, pp. 83-94.
- [4] B.T. POLYAK. – Subgradient methods: a survey of Soviet Research, in *Nonsmooth Optimization*, C. Lemarechal & R. Mifflin eds., Pergamon Press, 1978.
- [5] B.T. POLYAK, Y.Z. TSYPKIN. – Pseudogradient adaptation and training algorithms. *Automatica i Telem.*, vol. 3, 1973.
- [6] H.J. KUSHNER, D.S. CLARK. – *Stochastic approximation methods for constrained and unconstrained systems*, Springer Verlag, 1976.
- [7] J. NEVEU. – *Martingales à temps discret*, Masson, 1972.
- [8] P. BILLINGSLEY. – *Convergence of probability measures*, Wiley, 1968.
- [9] J.L. GOFFIN. – On the convergence rates of subgradient optimization methods, *Math. Prog.*, Vol. 13, n° 3, pp. 329-347, 1977.
- [10] J.F. MAURRAS. – Flot optimal sur un graphe avec multiplicateurs, *EDF DER, Série C*, n° 1, 1972.
- [11] J.C. DODU. – Modèle dynamique d'optimisation à long terme d'un réseau de transport d'énergie électrique. *RAIRO*, Vol. 12, n° 2, 1978.
- [12] A. GHOUILA-HOURI. – *Flots et tensions dans un graphe*, Thèse, Gauthier-Villars, 1964.
- [13] N. CHRISTOPHIDES, P. BROOKER. – Optimal expansion of an existing network, *Math. Prog.*, 6, pp. 197-211, 1974.
- [14] M. GONDRAN, M. MINOUX. – *Graphes et algorithmes*, Eyrolles, 1979.
- [15] W.M. WONHAM. – Random Differential Equations in Control Theory, *Probabilistic Method in Applied Math.*, vol. 2, ed. Barucha Reid, Academic Press, 1970.