SIAM J. CONTROL AND OPTIMIZATION
Vol. 18, No. 2, March 1980

0363-0129/80/1802-0008$01.00/0

EXISTENCE DE SOLUTION ET ALGORITHME DE RESOLUTION NUMERIQUE, DE PROBLEME DE CONTROLE OPTIMAL DE DIFFUSION STOCHASTIQUE DEGENEREE OU NON*

JEAN PIERRE QUADRAT†

Motivation et introduction. Donnons des exemples pratiques de contrôle stochastique que nous avons eu à résoudre.

1. *Une gestion de réservoir* Delebecque–Quadrat [8] (Problème posé par EDF).

t le temps.

X_t désigne les apports dans le réservoir. Ils sont modélisés par une diffusion stochastique. $X_t \geqq 0$ cette diffusion sera donc dégénérée.

S_t le stock d'eau dans le réservoir à l'instant t, $S_{\max}$[resp $S_{\min}$] le stock maximum [resp minimum].

u_t le débit turbiné à l'instant t,

$P(S_t, u_t)$ la puissance fournie par les turbines lorsque le débit est u_t, le stock S_t.

$D(t)$ la demande d'électricité en puissance à l'instant t.

La puissance thermique à produire sera alors $D(t)-P(S_t, u_t)$, le coût associé sera:

$$C(D(t)-P(S_t, u_t)).$$

Le problème de contrôle stochastique s'écrit alors:

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dw_t \qquad \sigma = 0 \text{ pour } X < 0$$

$$dS_t = \begin{cases} -(X_t-u_t)^-\, dt & \text{si } S_t = S_{\max}, \\ (X_t-u_t)\, dt & \text{si } S_{\min} < S_t < S_{\max}, \\ (X_t-u_t)^+\, dt & \text{si } S_t = S_{\min},\ X_t \geqq u_t \end{cases} \tag{0.1}$$

$$\operatorname*{Min}_u E \int_0^T C(D(t)-P(S_t, u_t))\, dt.$$

2. *Un problème de croissance de firme* Bensoussan–Lesourne [9].

X_t trésorerie à l'instant t,

y_t capital investi à l'instant,

$f(y_t)(\lambda\, dt + dw_t)$ rendement du capital investi à l'instant (w_t est un brownien),

v_t investissement,

u_t dividende versé aux actionnaires,

τ temps de faillite (trésorerie $=0$).

Contraintes:

$$u_t \geqq 0,$$
$$v_t \geqq 0,$$
$$u_t + v_t \leqq \lambda f(y_t) \text{ investissement} + \text{dividende}$$
$$\leqq \text{rendement moyen de l'investissement.}$$

* Received by the editors November 30, 1977, and in revised form March 5, 1979.

† Institut de Recherche d'Informatique et d'Automatique, Rocquencourt, 78150 Le Chesnay, France.

Le problème de contrôle stochastique correspondant:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{Max}_{v,u} E \int_0^T u_t e^{-it}\, dt, \\
(0.2)\qquad & dX_t = f(y_t)(\lambda\, dt + dw_t) - v\, dt - u\, dt, \\
& dy_t = v\, dt.
\end{aligned}
$$

Le critère représente la maximisation des dividendes actualisés (i taux d'actualisation) versés aux actionnaires.

3. *Un problème de gestion de portefeuille* Merton [16]. Soit X_t le capital dont on dispose à l'instant t. On a le choix entre acheter des actions à rendement aléatoire, et un placement à rendement fixe. Notons u_t la proportion investie dans les actions. Notons:

$1+dR_t^1$ le rendement des actions,

$1+dR_t^2$ le rendement du deuxième placement.

On modélise:

$$
dR_t^1 = \alpha_1\, dt + \sigma\, dw_t, \qquad w_t \text{ brownien;}
$$
$$
dR_t^2 = \alpha_2\, dt.
$$

Soit C_t la consommation à l'instant du capital à l'instant, $f(C_t)$ la fonction d'utilité de cette consommation.

L'évolution du capital est alors donnée par:

$$
\begin{aligned}
& dX_t = X_t(u\, dR_t^1 + (1-u)\, dR_t^2) - C\, dt, \\
& \quad = X_t u(\alpha_1\, dt + \sigma\, dw_t) + (1-u)X_t\alpha_2\, dt - C\, dt, \qquad 0 \leqq u \leqq 1, \\
(0.3)\qquad & \text{Le critère:} \\
& \operatorname*{Max}_{u,C} E \int_0^T f(C_t) + \phi(X_t).
\end{aligned}
$$

ϕ représente une fonction de legs, le critère représente la maximisation de l'utilité de la consommation plus le leg en fin de gestion.

Nous constatons que ces trois problèmes sont dégénérés, le terme de diffusion peut s'annuler. Dans le troisème problème le contrôle apparaît dans le terme de diffusion. Dans le premier problème, la deuxième équation d'évolution a un second membre discontinu.

Le but de ce travail est de donner des *théorèmes d'existence pour de tels problèmes*, et de *caractériser la solution optimale de façon à ce que l'on puisse la calculer effectivement.*

Un certain nombre de résultats existent dans la littérature Krylov–Nisio [12], Kushner–Chen-Fu-Yu [14], Fleming–Rishel [10], Sentis [21], Bismut [4], Kushner [13] mais aucun de ces travaux ne donne une réponse à ces trois problèmes.

Ce travail donne une réponse complète aux problèmes 1 et 3 et un théorème d'existence pour le problème 2 (la caractérisation des contrôles optimaux lorsqu'on arrête processus n'étant pas donné dans ce travail).

La méthode de résolution utilise deux techniques:

1. La formulation faible Stroock–Varadhan [22] de diffusion stochastique (problème de martingale).

2. Les techniques utilisées en contrôle déterministe décrivant le système commandé en terme de multiapplication Young [24], Castaing [6], Valadier [23], Ekeland–Temam [9], Sentis [21].

On est donc amené à définir le problème de martingale pour des multiapplications s.c.s. (semi continue superieurement).

On donne un théorème d'existence très général qui contient comme cas particulier des équations différentielles déterministes multivoques pour des multiapplications s.c.s. La méthode employée est celle utilisée dans Stroock–Varadhan [22] dans leur "invariance principle" montrant la convergence de chaîne de Markov vers des diffusions, et d'un lemme abstrait énoncé en 1.2.3.

Une fois l'existence assurée, pour de tels problèmes, on montre que l'ensemble des solutions au problème de martingale multivoque est un ensemble convexe compact de mesure de probabilités sur l'espace des fonctions continues sur $(0, T)$.

L'existence d'une solution au problème de contrôle stochastique en découle alors immédiatement.

La caractérisation du contrôle optimal se fait alors en déterminant une suite de mesures convergeant étroitement vers une solution optimale; cette suite de mesures étant obtenue comme solution de problème ce contrôle de chaîne de Markov. Les problèmes de contrôle de chaîne de Markov sont définis grâce à une technique très proche de celle employée dans Sentis [21] pour la résolution de problème de contrôle déterministe. L'idée d'approcher le problème de contrôle stochastique par un problème de contrôle de chaîne de Markov a été abondamment utilisé par Kushner [13] par example Kushner–Chen-Fu Yu [17]; les techniques employées ici sont différentes et permettent de résoudre complètement le problème, alors que dans Kushner–Chen-Fu Yu [14] (dans un cadre d'hypothèses moins général), le résultat obtenu peut s'énoncer ainsi, on construit un feedback meilleur que tout feedback lipschitzien. On donne en III un contre exemple montrant que ce résultat bien que pratiquement intéressant, est insuffisant. On peut, avec ces feedbacks être très loin du coût optimal (en fait, aussi loin qu'on veut).

On donne enfin une suite de problèmes de contrôle de chaîne de Markov, en temps discret, et à état discret qui converge vers une solution optimale. A chaque étape en temps il faut résoudre un problème de programmation mathématique (minimisation d'une forme linéaire sur un ensemble convexe) en dimension finie. Ce problème peut dans certaines applications être lourd à résoudre. On donne alors des résultats qui permettent d'obtenir un feedback meilleur que tout feedback lipschitzien (résultat du type Kushner–Chen-Fu Yu [14] dans un cadre plus général). Ces résultats peuvent avoir un intérêt pratique avec la restriction énoncée plus haut. Utilisant alors des résultats de Bismut [4] on montre que le feedback meilleur que tout feedback lipschitzien est optimal dans le *cas non dégénéré*. Ce qui permet de trouver des résultats du même type que ceux obtenus dans Goursat–Quadrat [11], Quadrat [19] par une méthode purement probabiliste, dans un cadre plus général, alors que dans cet article la méthode était basée essentiellement sur l'analyse numérique de l'équation de Bellman correspondante.

L'ensemble des résultats obtenus par les techniques des équations aux dérivées partielles est donné dans Bensoussan–Lions [1] bien que ne semblant pas pouvoir atteindre le degré de généralité obtenu par les méthodes probabilistes. Cette première méthode donne des résultats plus précis lorsqu'elle s'applique.

Signalons enfin une technique de semi-discrétisation en espace interprété en terme de processus ponctuel convergeant étroitement vers la diffusion, développé dans Robin [20].

Les résultats de cet article ont été annoncés dans Quadrat [25]. L'extension de ces résultats au cas des processus de diffusion avec sauts sera donné dans Quadrat [26].

PLAN.

1. *Problème de martingale.*
  1.1. *Définition du problème de martingale.*
  1.2. *Construction d'une mesure solution du problème de martingale.*
    1.2.1. *Une famille de probabilité de transition, définitions et propriétés.*
    1.2.2. *Une famille de probabilité sur $C(0, T; R^m)$, définitions et propriétés.*
    1.2.3. *Un théorème abstrait.*
    1.2.4. *Le théorème d'existence.*
  1.3. *Propriétés des solutions du problème de martingale.*
2. *Controle optimal de problème de martingale.*
  2.1. *Définition.*
  2.2. *Théorème d'existence.*
  2.3. *Caractérisation d'un contrôle optimal (discrétisation en temps).*
  2.4. *Caractérisation d'un contrôle optimal (discrétisation en espace et en temps).*
3. *Quelques resultats particuliers.*

1. Le problème de martingale.

1.1. Définition du problème de martingale.

1.1.1. Notations.

Soient

$$\Omega = C(0, T; R^m), \qquad X_t(\omega) = \omega_t,$$
$$F_t = \sigma(X_s, s \leqq t),$$
$$F = F_T \text{ la tribu des boréliens de } \Omega,$$
$$\mathcal{P} \text{ la tribu des prévisibles de } (\Omega \times [0, T]),$$

la multiapplication

(H_1) $C: [0, T] \times R^m \to G = R^m \times S^+(m)$ *s.c.s.*,[1] *à valeur convexe dans un compact fixe noté M_C, où S_m^+ désigne le cône convexe des matrices symétriques non négatives.*

Si l'on désigne par p_1 et p_2 les projections

$$p_1: R^m \times S_m^+ \to R^m \qquad ,$$
$$(x, y) \qquad p_1(x, y) = x$$
$$p_2: R^m \times S_m^+ \to S_m^+ \qquad .$$
$$(x, y) \qquad p_2(x, y) = y$$

on appellera:

$$A \text{ la multiapplication } p_2 \circ C,$$
$$B \text{ la multiapplication } p_1 \circ C.$$

[1] s.c.s: semi continue supérieurement; s.c.i: semi continue inférieurement.

On notera:

$$M_b = \sup_{s,x} \sup_{b \in B(s,x)} |b|,$$

$$M_a = \sup_{s,x} \sup_{a \in A(s,x)} |a|.$$

Pour

$\varphi \in C_b^{1,2}([0, T] \times R^m)$,

$\hat{c} = (\hat{b}, \hat{a}) : [0, T] \times \Omega \to R^m \times S_m^+$ processus prévisible à valeur dans C,

on désigne par:

$$L_{\hat{c}}\varphi(s, \omega) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, X_s(\omega)) + \sum_{i=1}^m \hat{b}_i(s, \omega) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(s, X_s(\omega)) + \sum_{i,j} \hat{a}_{ij}(s, \omega) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s(\omega)).$$

Pour

$$\tilde{c} = (\tilde{b}, \tilde{a}) : [0, T] \times R^m \to R^m \times S_m^+,$$

on désignera par:

$$L_{\tilde{c}}\varphi(s, x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, x) + \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i(s, x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(s, x) + \sum_{i,j} \tilde{a}_{ij}(s, x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(s, x).$$

$\mathcal{M}_b(\Omega)$ désigne l'ensemble des mesures bornées muni de la topologie de la convergence étroite.

$\mathcal{M}_+^1(\Omega)$ désigne le convexe des lois de probabilités sur Ω.

1.1.2. Définition du problème de martingale. *Une mesure de probabilité P sur (Ω, F_t, F) sera appelée solution du problème de martingale pour le doublet (x, C) si*:

(i) $P(X_0 = x) = 1$

(ii) *il existe un processus $c(s, \omega)$ prévisible vérifiant*:

$$\hat{c}(s, \omega) \in C(s, X_s(\omega))$$

$$\varphi(t, X_t(\omega)) - \int_0^t L_{\hat{c}}\varphi(s, \omega)\, ds \quad \textit{est une } (P, F_t) \textit{ martingale.}$$

On désignera par:

$\mathcal{P}(K, C)$ l'ensemble ces *mesures de probabilités* sur Ω, *solution du problème de martingale (x, C), $x \in K$, K compact de R^m.*

1.2. Construction d'une mesure solution du problème de martingale.

1.2.1. Une famille de probabilités de transition. On se donne un nombre $n \in N$, on pose $h = T/n$. Pour $\rho, \alpha, \beta, > 0$;

notons:

$$\prod^{n,C,\rho,\alpha,\beta}(s, x) = \Big\{ \pi \in \mathcal{M}_+^1(R^m):$$

$$(1.1), (1.2) \quad \left(\int (y - x)\pi(dy), \int (y - x)^{\otimes 2}\pi(dy) \right) = (b(s, x)h, a(s, x)h) \in C(s, x)h,$$

$$(1.3) \qquad \int |y - x|^\beta \pi(dy) \leqq \rho h^\alpha \Big\}.$$

LEMME 1. *$\Pi^{n,C,\rho,\alpha,\beta} : [0, T] \times R^m \to \mathcal{M}_+^1(R^m)$ est à valeur relativement compacte.*

Démonstration. Grâce au critère de Prohorov, il suffit de montrer:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M, \qquad \pi_{s,x}(|y-x| \geqq M) \leqq \varepsilon.$$

Or, l'inégalité de Tchebycheff donne:

$$\pi_{s,x}(|y-x| \geqq M) \leqq \frac{M_a^2 h}{M^2}.$$

En prenant $M \geqq M_a/\sqrt{h/\varepsilon}$ on obtient le résultat. □

LEMME 2. *Soit* $\varphi : R^m \to R$ *continue vérifiant*:

(i) $\exists M_1, M_2 : |z| \geqq M_1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(z) \leqq |z|^\beta M_2.$

Soit une suite $\{\pi^n\} \in \mathcal{M}_+^1(R^m)$ *convergent étroitement vers* π *vérifiant* $\exists \beta' > \beta$ *et* ρ:

(ii) $\int |y-x|^{\beta'} \pi^n(dy) \leqq \rho$

alors:

(a) $\int |y-x|^{\beta'} \pi(dy) \leqq \rho$

(b) $\lim_{-n} \int \varphi(y-x_n)\pi^n(dy) = \int \varphi(y-x)\pi(dy)$ *pour toute suite* $x_n \to x$.

Démonstration. (a) Notons:

$$\Psi_M : R \to R$$

$$\Psi_M(x) = \begin{cases} x & \text{si} -M \leqq x \leqq M, \\ M & \text{si } x > M, \\ -M & \text{si } x < -M. \end{cases}$$

On a:

$$\rho \geqq \int |y-x|^{\beta'} \pi^n(dy) \geqq \int \Psi_M(|y-x|^{\beta'})\pi^n(dy) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int \Psi_M(|y-x|^{\beta'})\pi(dy)$$

et donc:

$$\int \Psi_M(|y-x|^{\beta'})\pi(dy) \leqq \rho \quad \forall M,$$

$$\rho \geqq \sup_M \int \Psi_M(|y-x|^{\beta'})\pi(dy) = \int \sup_M \Psi_M(|y-x|^{\beta'})\pi(dy) = \int |y-x|^{\beta'} \pi(dy).$$

(1.4) (b)
$$\left| \int \varphi(y-x_n)\pi^n(dy) - \int \varphi(y-x)\pi(dy) \right|$$
$$\leqq \left| \int (\varphi(y-x_n) - \varphi(y-x))\pi^n(dy) \right| + \left| \int \varphi(y-x)(\pi^n - \pi)(dy) \right|,$$

$$\int |\varphi(y-x_n) - \varphi(y-x)|\pi^n(dy)$$
$$\leqq \int_{|y-x| \geqq M_3} |\varphi(y-x_n) - \varphi(y-x)|\pi^n(dy)$$
$$+ \int_{|y-x| \leqq M_3} |\varphi(y-x_n) - \varphi(y-x)|\pi^n(dy),$$

$$\int_{|y-x| \leqq M_3} |\varphi(y-x_n) - \varphi(y-x)|\pi^n(dy) \leqq \sup_{|y-x| \leqq M_3} |\varphi(y-x_n) - \varphi(y-x)| \to 0$$
$$n \to \infty.$$

En choisissant M_3 suffisamment grand

$$\int_{|y-x|\geqq M_3} |\varphi(y-x_n)-\varphi(y-x)|\pi^n(dy) \leqq M_4 \int_{|y-x|\geqq M_3} |y-x|^\beta \pi^n(dy) + |x-x^n|^\beta M_6$$

$$\leqq \frac{M_4}{M_3^{\beta'-\beta}} \int |y-x|^{\beta'} \pi^n(dy)$$

$$+|x-x^n|^\beta M_6 \to 0, \qquad n\to\infty,$$

en faisant tendre n et $M_3 \to \infty$; d'autre part

$$\left|\int \varphi(y-x)(\pi^n-\pi)(dy)\right|$$

$$\leqq \left|\int \Psi_{M^\circ}\varphi(y-x)(\pi^n-\pi)(dy)\right| \tag{1.5}$$

$$+\frac{1}{M^{(\beta'-\beta)/\beta}} \int_{|\varphi(y-x)|\geqq M} |\varphi(y-x)|^{\beta'/\beta} |\pi^n-\pi|(dy)$$

$\Psi_M{}^\circ\varphi(y-x)$ est continue donc:

$$\int \Psi_M{}^\circ\varphi(y-x)(\pi^n-\pi)\,dy \to 0, \qquad n\to\infty. \tag{1.6}$$

Grâce à (i)

$$\int_{|\varphi(y-x)|\geqq M} |\varphi|^{\beta'/\beta}(y-x)|\pi^n-\pi|(dy) \leqq M_5 \int |y-x|^{\beta'}|\pi^n-\pi|(dy) \leqq 2\rho M_5; \tag{1.7}$$

(1.4), (1.5), (1.6), (1.7)$\Rightarrow b$ en faisant tendre $M\to\infty$. □

PROPOSITION 0. *La multiapplication* $\Pi^{n,C,\rho,\alpha,\beta}: [0, T]\times R^m \to \mathcal{M}_+^1(R^m)$ *est s.c.s.*

Démonstration. Montrons qu'elle est de graphe fermé et donc grâce au Lemme 1 à valeur compacte:

Soit:

(s_k, x_k, π_k) une suite de $[0, T]\times R^m\times\mathcal{M}_+^1(R^m)$ convergeant vers (s, x, π). Montrons que $\pi\in\Pi^{n,C,\rho,\alpha,\beta}$.

Pour cela il suffit de montrer que π vérifie (1.1), (1.2) et (1.3).

Or, (1.3) résulte du (a) du Lemme 2, tandis que (1.1) et (1.2) résulte de (b) du Lemme 2.

1.2.2. Une famille de probabilités sur Ω. A partir de la famille de probabilité de transition $\Pi^{n,C,\rho,\alpha,\beta}$ construisons une famille de probabilité sur Ω de la façon suivante:

Etant données une section borélienne $\pi_{s,x}$ de $\Pi^{n,C,\rho,\alpha,\beta}$ construisons la mesure notée

$$\begin{aligned} &\bar P^n_\pi \text{ sur } (R^{m\times(n+1)}, \mathcal{B}) \text{ définie par:}^2\\ &\bar P^n_{\pi,y_0} = \pi_{h,y_0}(dy_1)\cdots\pi_{(n-1)h,y_{n-1}}(dy_n). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Considérons maintenant la variable aléatoire interpolation linéaire.

$$(R^{m\times(n+1)}, \mathcal{B}) \xrightarrow{I_n} (\Omega, F_T),$$

$$I_n(y_0, y_1, \cdots y_n)(t) = y_i + \frac{y_{i+1}-y_i}{h}(t-ih), \qquad t\in[ih, (i+1)h].$$

[2] $\mathcal{B}$ désigne la tribu des boréliens.

On désignera par P^n_{π,y_0} la mesure image de $\bar{P}^n_{\pi,y_0}$ par I_n. Notons alors:

(1.9) $\mathscr{P}(n, K, C, \rho, \alpha, \beta) = \{P^n_{\pi, y_0} : \pi$ section borélienne de $\Pi^{n, C, \rho, \alpha, \beta}$, $y_0 \in K\}$

de même:

$$\mathscr{P}(N, K, C, \rho, \alpha, \beta) = \bigcup_{n \in N} \mathscr{P}(n, K, C, \rho, \alpha, \beta).$$

LEMME 3. *$\mathscr{P}(N, K, C, \rho, \alpha, \beta)$ est étroitement relativement compacte pour $\forall \alpha, \beta$ $\alpha > 1$, $4 \geqq \beta > 2$.*

Démonstration. On utilise le critère de relative étroite compacité suivant [3 th. 12.3 Pb 7, p. 102]: (a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists L$ compact de R^m:

$$P(X(0) \in L) \geqq 1 - \varepsilon \quad \forall P \in \bigcup_{2 < \beta \leqq 4} \mathscr{P}(N, K, C, \rho, \alpha, \beta).$$

(b) $\exists \gamma \geqq 0$ et $\delta > 1$ et une fonction continue non décroissante F tels que:

$$E_P\{|X(t_2) - X(t)|^\gamma |X(t) - X(t_1)|^\gamma\} \leqq |F(t_2) - F(t_1)|^\delta,$$

$$\forall P \in \mathscr{P}(N, K, C, \rho, \alpha, \beta) \qquad 2 < \beta \leqq 4 \text{ et } \alpha > 1,$$

$$\forall t_1, t, t_2, \quad 0 \leqq t_1 \leqq t \leqq t_2 \leqq T.$$

On obtient (a) en prenant $L = K$.

Démontrons le (b): Soit: $t_1 \leqq t \leqq t_2$, β défini en 1.3., $\gamma = \beta/2$,

$$t_1'' = \left(\left[\frac{t_1}{h}\right] + 1\right) h, \quad t_2' = \left[\frac{t_2}{h}\right] h, \quad t' = \left[\frac{t}{h}\right] h, \quad t'' = \left(\left[\frac{t}{h}\right] + 1\right) h,$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière.

Plaçons nous dans le cas où $t_1'' < t' < t'' < t_2'$, les autres cas conduisant à des démonstrations analogues. On a:

$$\begin{aligned} & E|X_{t_2} - X_t|^\gamma |X_t - X_{t_1}|^\gamma \\ & \quad \leqq M(\beta) E(|X_{t_2} - X_{t_2'}|^\gamma \\ & \qquad + |X_{t_2'} - X_{t''}|^\gamma + |X_{t''} - X_t|^\gamma)(|X_t - X_{t'}|^\gamma + |X_{t'} - X_{t_1''}|^\gamma + |X_{t_1''} - X_{t_1}|^\gamma) \\ & \quad \leqq M(\beta)(S_1 + S_2 + S_3) \end{aligned} \tag{1.10}$$

avec

$$S_1 = E\{E(|X_{t_2} - X_{t_2'}|^\gamma + |X_{t_2'} - X_{t''}|^\gamma | F_{t''})(|X_t - X_{t'}|^\gamma + |X_{t'} - X_{t_1''}|^\gamma + |X_{t_1''} - X_{t_1}|^\gamma)\}$$

$$S_2 = E\{|X_{t''} - X_t|^\gamma |X_t - X_{t'}|^\gamma\},$$

$$S_3 = E\{E(|X_{t''} - X_t|^\gamma | F_{t'})(|X_{t'} - X_{t''}|^\gamma + |X_{t_1''} - X_{t_1}|^\gamma)\};$$

or:

$$\begin{aligned} E(|X_{t_2} - X_{t_2'}|^\gamma | F_{t''}) &= \frac{|t_2 - t_2'|^\gamma}{h^\gamma} E((X_{t_2'+h} - X_{t_2'})^\gamma | F_{t''}) \\ &\leqq \frac{|t_2 - t_2'|^\gamma}{h^\gamma} h^{\alpha/2} \leqq M_1 |t_2 - t_2'|^{\inf(\alpha/2, \gamma)} \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$E(|X_{t_2'} - X_{t''}|^\gamma | F_{t''}) \leqq M_2(\gamma) E(|Y_{t_2'} - Y_{t''}|^\gamma | F_{t''}) + E\left(\left|\sum_{t'' \leqq ih < t_2'} hb(ih, X_{ih})\right|^\gamma\right)$$

avec:

$$Y_t = X_t - \sum_{ih<t} b(ih, X_{ih})h \quad \text{où} \quad b(ih, X_{ih}) = E(X_{(i+1)h} - X_{ih}|X_{ih})$$
$$= \int (y - X_{ih})\pi_{ih,X_{ih}}(dy).$$

Y_t est une F_{ih} martingale on a alors:

$$E(|Y_{t_2'} - Y_{t''}|^\gamma|F_{t''}) \leqq E((Y_{t_2'} - Y_{t''})^2|F_{t''})^{\gamma/2} \quad \text{grâce à l'inégalité de Jansen}$$
$$\leqq M_a^{\gamma/2}(t_2' - t'')^{\gamma/2}$$

grâce à la propriété de martingale de Y_t et $\int (y - X_{ih})^2\pi_{ih,X_{ih}}(dy) \leqq M_a$.

En utilisant de plus le fait que:

$$\sup_{i,\omega} |b(ih, X_{ih})| \leqq M_b$$

on obtient:

$$E(|X_{t_2'} - X_{t''}|^\gamma|F_{t''}) \leqq M_2(|t_2' - t''|^{\gamma/2} + |t_2' - t''|^\gamma) \leqq M_3|t_2' - t''|^{\gamma/2} \tag{1.12}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} E(|X_{t''} - X_t|^\gamma|X_t - X_{t'}|^\gamma) &\leqq \left(\frac{t''-t}{h}\right)^\gamma\left(\frac{t-t'}{h}\right)^\gamma E|X_{t''} - X_{t'}|^\beta \\ &\leqq (t''-t)^\gamma(t-t')^\gamma \frac{h^\alpha}{h^{2\gamma}} \leqq |t''-t'|^{\mathrm{Inf}(2\gamma,\alpha)}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

En combinant les majorations du type (1.11), (1.12), (1.13), on obtient:

$$E|X_{t_2} - X_t|^\gamma|X_t - X_{t_1}|^\gamma \leqq M_4|t_2 - t_1|^{\mathrm{Inf}(2\gamma,\alpha)}.$$

Dans le cas où $t_1'' < t' < t'' < t_2'$ n'est pas vérifié, on a à faire des majorations du type (1.11), (1.12), (1.13) pour obtenir le résultat.

LEMME 4 (Stroock–Varadhan [22]). *Soit*

$$\varphi \in C_b^{1,2}([0, T], R^m).$$

Notons:

$$\Delta_\varphi^h(t, x, y) = \varphi(t+h, y) - \varphi(t, x) - h\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, x)$$
$$-(y-x)D\varphi(t, x) - {}^t(y-x)D^2\varphi(t, x)(y-x)$$

$$\bar{\Delta}_{\varphi,\pi}^h(t, x) = \int |\Delta_\varphi^h(t, x, y)|\pi_{t,x}(dy)$$

pour π section borélienne de $\Pi^{n,C,\rho,\alpha,\beta}$.

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{P\in\mathcal{P}(n,K,C)} E_P\left\{\sum_i \bar{\Delta}_{\varphi,\pi}^h(ih, X_{ih}(\omega))\right\} = 0.$$

Démonstration. La famille $\mathcal{P}(N, K, C)$ étant étroitement relativement compacte,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists M \sup_{P\in\mathcal{P}(N,K,C)} P\left\{\sup_{0\leqq t\leqq T} |X(t)| \geqq M\right\} \geqq \varepsilon,$$
$$\forall\varphi \in C_b^{1,2} \; \exists K(\varphi); |\Delta_\varphi^h(t, x, y)| \leqq K(|x-y|^2 + h),$$

et donc

$$\bar{\Delta}^h_{\varphi,\pi}(t, x) \leqq M_1 h.$$

Il reste à montrer que:

$$\sup_{\pi \text{ section borélienne de } \Pi^{n,C,\rho,\alpha,\beta}} \bar{\Delta}^h_{\varphi,\pi}(t, x) = o(h).$$

Le théorème de Taylor donne:

$$|\Delta^h_\varphi(t, x, y)| = o(h) + o(|x-y|)^2 \quad \text{uniformément pour } x|x| \leqq M, \text{ c.à.d.:}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon, \varphi): \qquad h \leqq \delta |x-y| \leqq \delta \Rightarrow |\Delta^h_\varphi(t, x, y)| \leqq \varepsilon h + \varepsilon |x-y|^2$$

donc:

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}^h_{\varphi,\pi}(t, x) &= \int_{|y-x|\leqq\delta} |\Delta^h_\varphi(t, x, y)| \pi_{t,x}(dy) + \int_{|y-x|\geqq\delta} |\Delta^h_\varphi(t, x, y)| \pi_{t,x}(dy) \\
&\leqq \varepsilon \int |y-x|^2 \pi_{t,x}(dy) + \frac{1}{\delta^{\beta-2}} \int_{|y-x|\geqq\delta} |y-x|^\beta \pi_{t,x}(dy) + o(h) \\
&\leqq \varepsilon M_a h + \rho \frac{h^\alpha}{\delta^{\beta-2}} + o(h)
\end{aligned}$$

d'où le lemme. □

1.2.3. Un théorème abstrait.

Proposition 1. *Soit sur Ω un espace polonais*

(i) *une suite de mesures de probabilité $\{Q_n\}$ convergeant étroitement vers Q,*

(ii) *une suite $\{C_n\}$ de multiapplication de $\Omega \to R^n$, s.c.s., à valeur convexe dans un compact fixe, convergeant ponctuellement en décroissant, pour la distance de Hausdorff, vers une multiapplication s.c.s. C,*

(iii) *une suite $\{f_n\}$ de variables aléatoires à valeur dans $\{C_n\}$;*

Alors:

(a) *la suite de mesure $\{f_n Q_n\}$ est étroitement relativement compacte,*

(b) *il existe une sous-suite extraite de $\{f_n Q_n\}$ convergeant étroitement vers une mesure bornée, notée Q_f, absolument continue par rapport à Q;*

(c) *si l'on note $f = dQ_f/dQ$ la classe des densités de Q_f par rapport à Q, il existe un représentant borélien de f, appartenant à C.*

Remarque. On a évidemment une proposition analogue en remplaçant mesure de probabilité par mesure positive bornée.

On a un théorème analogue lorsque $C_n \to C$ sans décroître à condition que l'on ait $\sup_\omega d(C_n(\omega), D_n(\omega)) \to 0$ avec $D_n \downarrow C$.

Lemme 5. *La suite $\{f_n Q_n\}$ définie par* (i), (ii) *et* (iii) *est étroitement relativement compacte.*

Démonstration. f_n est uniformément borné, notons M_c cette borne.

Q_n est étroitement relativement compacte, $\forall \varepsilon$ il existe donc [3] un compact K_ε.

$$Q_n(CK_\varepsilon) \leqq \frac{\varepsilon}{M}$$

et donc

$$|f_n Q_n|(CK_\varepsilon) \leqq |f_n| Q_n(CK_\varepsilon) \leqq \varepsilon$$

d'où le lemme. □

LEMME 6. *De la suite $\{f_nQ_n\}$ définie par* (i), (ii) *et* (iii) *il existe une sous-suite convergeant vers une mesure bornée notée Q_f absolument continue par rapport à Q.*

Démonstration. Le lemme 1 montre qu'il existe une sous-suite $\{f_{n'}Q_{n'}\}$ convergeant vers une mesure notée Q_f.

$$\sup_{n'} |f_{n'}| \leqq M \quad \text{donc:} \quad -MQ_{n'} \leqq f_{n'}Q_{n'} \leqq MQ_{n'},$$

et donc la suite de mesure $(M-f_{n'})Q_{n'}$ est positive, et converge donc, vers $MQ-Q_f \geqq 0$; de même

$$Q_f - MQ \geqq 0.$$

On obtient donc:

$$-MQ \leqq Q_f \leqq MQ \quad \text{d'où le résultat.} \quad \square$$

LEMME 7. *Soit sur Ω un espace métrisable séparable, une famille de mesure de probabilité Q_n convergeant étroitement vers Q et une famille Ψ_n de variable aléatoire s.c.s. bornée décroissante convergeant ponctuellement vers Ψ alors*:

$$\limsup_n \int \Psi_n \, dQ_n \leqq \int \Psi \, dQ.$$

Démonstration.

$$\int \Psi_n \, dQ_n \leqq \int \Psi_N \, dQ_n \quad si\ n \geqq N$$

grâce à la décroissance de Ψ_n.

Ψ_n étant s.c.s. le th. 5.5 De Lacherie–Meyer [7] entraîne:

$$\limsup_n \int \Psi_N \, dQ_n \leqq \int \Psi_N \, dQ.$$

et donc

$$\limsup_n \int \Psi_n \, dQ_n \leqq \limsup_n \int \Psi_N \, dQ_n \leqq \int \Psi_N \, dQ \quad \forall N.$$

Ψ_N étant décroissante en N et convergeant vers Ψ, on a (Neveu [17])

$$\lim_N \int \Psi_N \, dQ = \int \lim_N \Psi_N \, dQ = \int \Psi \, dQ$$

d'où le résultat. $\square$

Démonstration de la proposition: Le (a) résulte du lemme 1; le (b) résulte du lemme 2. Montrons le(c). $f_n \in C_n$ et donc $\forall \varphi \in C_b^0(\Omega, R^m)$

$$\underset{f \in C_n(\omega)}{\text{Max}} f \cdot \varphi(\omega) \geqq f_n \cdot \varphi(\omega) \quad \forall \omega.$$

Q_n étant positive,

$$\int \max_{f \in C_n} f \cdot \varphi \, dQ_n \geqq \int f_n \cdot \varphi \, dQ_n$$

l'application:

$$\omega \to \underset{f \in C_n(\omega)}{\text{Max}} f \cdot \varphi(\omega) \quad \text{est s.c.s.}$$

car C_n est une multiapplication s.c.s. et φ est continue, notons Ψ_n cette fonction.

C_n étant décroissante en n, il en est de même de Ψ_n, $d(C_n(\omega), C(\omega)) \to 0$

$$\Rightarrow \Psi_n(\omega) \to \Psi(\omega).$$

Le lemme 6 $\Rightarrow$

$$\limsup_n \int \operatorname{Max}_{f\in C_n} f \cdot \varphi\, dQ_n \leqq \int \operatorname{Max}_{f\in C} f \cdot \varphi\, dQ$$

comme,

$$\int \operatorname{Max}_{f\in C} f \cdot \varphi\, dQ = \operatorname{Max}_{f\in C} \int f \cdot \varphi\, dQ$$

il vient:

$$\lim_n \int f_n \cdot \varphi\, dQ_n \leqq \operatorname{Max}_{f\in C} \int f \cdot \varphi\, dQ \quad \forall n$$

et donc si l'on désigne par $\tilde{f} = dQ_f/dQ$ on obtient

$$\int \tilde{f} \cdot \varphi\, dQ \leqq \operatorname{Max}_{f\in C} \int f \cdot \varphi\, dQ \quad \forall \varphi\ C_b^0(\Omega, R^m),$$

ce qui peut se réécrire

$$0 \geqq \sup_{\varphi\in C_b^0} \{(\varphi, Q_f) - \sup_{Q_c \in CQ} (\varphi, Q_c)\},$$

avec:
$(\cdot, \cdot)$ désigne la dualité séparante [5 p. 59].

$$\mathcal{M}^b(\Omega\times[0, T]), \qquad C^b(\Omega\times[0, T]),$$

CQ désigne le convexe des mesures de $\mathcal{M}^b$ absolument continues par rapport à Q de densité c ayant un représentant $\in C$.

Le théorème 6.3.7 [15] permet alors d'affirmer que dès que CQ est fermé (CQ fermé résulte du lemme 7'):

$$\sup_{\varphi\in C_b} \{(\varphi, Q_f) - \sup_{Q_c\in CQ} (\varphi, Q_c)\} = \chi_{CQ}(Q_f).$$

et donc

$$0 \geqq \chi_{CQ}(Qf) \quad \Rightarrow \quad Q_f \in CQ \quad Q \text{ p.p.} \quad \Rightarrow \quad \text{la proposition.} \quad \square$$

LEMME 7'. *CQ est un ensemble convexe fermé dans $\mathcal{M}_+^1(\Omega)$*

Démonstration. Convexe est évident.

Fermé: Soit $\{f_nQ\}$ une suite $\in CQ$. f_n reste dans un borné de $L^\infty(\Omega, Q)$ donc converge faiblement $\sigma(L^\infty, L^1)$ vers f, donc il existe un compromis convexe $\sum a_n f_n$ convergeant Q p.p. or $\sum a_n f_n(\omega) \in C(\omega) \Rightarrow f(\omega) \in C(\omega)$ puisque $C(\omega)$ est fermé c.q.f.d.

1.2.4. Le théorème d'existence.

THÉORÈME 1.

$$\mathcal{P}(K, C) \supset \bigcap_N \overline{\bigcup_{n\geqq N} \mathcal{P}(n, K, C, \rho, \alpha, \beta)}$$

(1.14) $$\exists \rho : \bigcap_N \overline{\bigcup_{n\geqq N} \mathcal{P}(n, K, C, \rho, 2, 3)} \neq \varnothing.$$

Démonstration. (a) $\exists \rho : \bigcap_N \overline{\bigcup_{n\geqq N} \mathcal{P}(n, K, C, \rho, 2, 3)} \neq \varnothing$: En effet, $\mathcal{P}(n, K, C, \rho, 2, 3) \neq \varnothing$ (prendre par example des accroissements gaussiens.).

Donc $\exists\{P_n\}P_n \in \mathcal{P}(n, K, C, \rho, 2, 3)$, la suite est étroitement relativement compacte. Il existe donc une sousesuite $P_{n'} \to P \in \bigcap_N \bigcup_{n \geqq N} \mathcal{P}(n, K, C, \rho, 2, 3)$ et donc $\bigcap_N \bigcup_{n \geqq N} \mathcal{P}(n, K, C, \rho, 2, 3) \neq \emptyset$.

(b) $\mathcal{P}(K, C) \supset \bigcap_N \bigcup_{n \geqq N} \mathcal{P}(n, K, C, \rho, \alpha, \beta)$: Soit $P \in \bigcap_N \bigcup_{n \geqq N} \mathcal{P}(n, K, C, \rho, \alpha, \beta)$. $\exists$ une suite $\{P_{n_i}\}P_{n_i} \in \mathcal{P}(n_i, K, C, \rho, \alpha, \beta), P_{n_i} \xrightarrow[i \to \infty]{} P$. Montrons que $P \in \mathcal{P}(K, C)$.

En effet, considérons la suite d'espace mesuré $\{\Omega \times [0, T], F \otimes \mathcal{B}; Q_{n_i}\}$ avec

$$Q_{n_i} = P_{n_i}(d\omega) \otimes \frac{T}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i - 1} \delta_{jh}(dt). \tag{1.15}$$

Q_{n_i} converge étroitement vers $P(d\omega) \otimes dt$.

$$P_{n_i} \in \mathcal{P}(n_i, K, C, \rho, \alpha, \beta) \quad \exists\{\pi^{n_i}\}\{y^{n_i}\} : \{y_{n_i} \in K\}\{\pi^{n_i} \in \Pi^{n_i, C, \rho, \alpha, \beta}\} \tag{1.16}$$

tels que $P_{n_i} = P^{n_i}_{\pi_{n_i}, y_{n_i}}$.

(b1) *Montrons alors* $\exists y \in K, P(x_0 = y) = 1$. K étant compact il existe $\{n'_i\}$: $y_{n'_i} \to y \in K$. Soit $\varphi \in C_b^0(R^m)$

$$E^{P_{n'_i}}\varphi(x_0) \xrightarrow[i \to \infty]{} E^P \varphi(x_0) \quad \text{car } \omega \to \varphi \circ x_0(\omega) \text{ est continue bornée} \tag{1.17}$$

or

$$E^{P_{n'_i}}\varphi(x_0) = \varphi(y_{n'_i}) \xrightarrow[i \to \infty]{} \varphi(y). \tag{1.18}$$

(1.17) et (1.18) entraîne alors le résultat

(b2) *Montrons qu'il existe* $\hat{f}(s, \omega)$ *prévisible vérifiant*

$$\hat{f}(s, \omega) \in C(s, \omega) \tag{1.19}$$

$$\varphi(X_t) - \int_0^t L_{\hat{f}} \varphi(s, \omega)\, ds \text{ est une } (P, F_t) \text{ martingale.} \tag{1.20}$$

$P^{n_i} = P^{n_i}_{\pi_{n_i}, y_{n_i}}$; il exist donc

$$c_{n_i}(s, x) \in C(s, x) \quad \text{avec } c_{n_i}(s, x) = (b_{n_i}(s, x), a_{n_i}(s, x))$$

$$\int (y - x)\pi^{n_i}_{s, x}(dy) = b_{n_i}(s, x)h,$$

$$\int (y - x) \otimes (y - x)\pi^{n_i}_{s, x}(dy) = a_{n_i}(s, x)h.$$

Considérons alors la suite de mesure

$$c_{n_i}(s, X_s(\omega))\, dQ_{n_i}$$

Grâce à la proposition 1 $\exists\{n'_i\}$

$$c_{n'_i}(s, X_s(\omega))\, dQ_{n'_i} \to c(s, \omega)\, dQ \tag{1.21}$$

avec

$$c(s, \omega) \in C(s, X_s(\omega)).$$

Notons $\hat{c}(s, \omega)$ la projection sur la tribu des prévisibles de $c(s, \omega)$. L'inégalité de Jensen montre que: $\hat{c}(s, \omega) \in C(s, X_s(\omega))$.

Montrons que P vérifie (1.20) pour $\hat{f}(s, \omega) = \hat{c}(s, \omega)$.

Notons pour $\varphi \in C_b^{1,2}([0, T]\times R^m)$

$$Z_\varphi^n(u, t, \omega) = \int_u^t h \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{jh}(ds) \int \{\varphi((j+1)h, y) - \varphi(jh, X_{jh})\}\pi_{jh,X_{jh}}^n(dy)$$

Φ continue F_u mesurable

$k_n h \to t$,

$l_n h \to u$,

$$0 = E^{P_n}\{[\varphi(k_n h, X_{k_n h}) - \varphi(l_n h, X_{l_n h}) - Z(l_n h, k_n h, \omega)]\Phi\}$$

$$= E^{P_n}\left\{\left[\varphi(k_n h, X_{k_n h}) - \varphi(l_n h, X_{l_n h}) - \int_{l_n h}^{k_n h} L_{c_n}\varphi(s, \omega) h \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{jh}(s)\right]\Phi\right\}$$

$$+ E^{P_n}\left\{\left[\int_{l_n h}^{k_n h} L_{c_n}\varphi(s, \omega) h \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{jh}(s) - Z_\varphi^n(l_n h, k_n h, \omega)\right]\Phi\right\}.$$

Grâce au lemme 4, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{P_n} E^{P_n}\left|\left[\int_{l_n h}^{k_n h} L_{c_n}\varphi(s, \omega) h \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{jh}(s) - Z_\varphi^n(l_n h, k_n h, \omega)\right]\Phi\right| = 0.$$

Grâce à la définition de $\hat{c}$, $k_n h \to t$, $l_n h \to u$ on a:

$$\lim_{n\to\infty} E^{P_n}\left\{\Phi\left[\varphi(k_n h, X_{k_n h}) - \varphi(l_n h, X_{l_n h}) - \int_{l_n h}^{k_n h} L_{c_n}\varphi(s, \omega) h \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{jh}(s)\right]\right\}$$

$$= E^P\left\{\Phi\left[\varphi(t, X_t) - \varphi(u, X_u) - \int_u^t L_{\hat{c}}\varphi(s, \omega)\, ds\right]\right\} = 0 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

1.2.5. Existence d'une solution faible à l'équation de Fokker–Planck. Soit C la multiapplication défini en 1.1 *on dira que μ_t est solution faible de l'équation de Fokker Planck s'il existe $\tilde{c}(s, x)$ section borélienne de $C(s, x)$*:

(1) $\mu_t \in \mathcal{M}_+^1(R^m)$;

(2) $\mu_0 = \delta_{z_0}$;

(3) $\forall \varphi \in C_b^{1,2}(R^m)$ on a

$$\int \varphi(T, x)\mu_T(dx) - \varphi(0, x_0) - \int_0^t \int_{R^m} L_{\tilde{c}}\varphi(s, x)\mu_s(dx)\, ds = 0.$$

On notera $\mu(K, C)$ l'ensemble des solutions faibles de l'équation de Fokker–Planck.

THÉORÈME 2.

$$\mu(K, C) \neq 0.$$

Démonstration. $P \in \mathcal{P}(K, C)$ correspond μ_t par l'application $\omega \to X_t(\omega)$: μ_t vérifie (3); en effet, il suffit de prendre $\tilde{c}(s, x) =$ projection de $\hat{c}(s, \omega)$ défini en (1.21) sur la tribu du présent $\{\sigma(X_s)\}$ on a alors

$$O = E^P\left\{\varphi(T, X_T) - \varphi(0, X_0) - \int_0^T L_{\tilde{c}}\varphi(s, \omega)\, ds\right\}$$

$$= \int \varphi(T, X)\mu_T(dx) - \varphi(0, X_0) - \int_0^T \int_{R^m} L_{\tilde{c}}\varphi(s, x)\mu_s(dx)\, ds.$$

1.3. Propriétés de $\mathcal{P}(K, C)$.

THÉORÈME 3. *$\mathcal{P}(y, C)$ est un compact convexe non vide de $\mathcal{M}_+^1(\Omega)$.*

On va démontrer ce théorème grâce à trois lemmes.

LEMME 8. *$\mathcal{P}(K, C)$ est étroitement relativement compact.*

Démonstration. On utilise le critère suivant P. Billingsley th. 12.3 [3]. Il existe une fonction continue non décroissante F et deux nombres γ et α, $\gamma \geqq 0$, $\alpha > 1$, tels que

$$E_P|X(t)-X(s)|^\gamma \leqq |F(t)-F(s)|^\alpha \quad \forall P \in \mathcal{P}(K, C).$$

On l'applique avec $\gamma = 3$, $\alpha = \frac{3}{2}$, $F(t) = t$.

Soit en effet $P \in \mathcal{P}(K, C)$, $\exists c(s, \omega) = (b(s, \omega), a(s, \omega)) \in C(s, X_s(\omega))$ prévisible tel que: $M_t = X(t) - \int_0^t b(s, \omega)\, ds$ soit une martingale de processus croissant $\int_0^t a(s, \omega)\, ds$ et donc $\exists \delta(M_b)$:

$$E^P|X(t)-X(s)|^3 \leqq \delta(|t-s|^3 + E|M_t - M_s|^3).$$

En utilisant la proposition 19 de [18] on a:

$$E|M_t - M_s|^3 \leqq E\left(\int_s^t a(u, \omega)\, du\right)^{3/2} \leqq M_a|t-s|^{3/2}. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

LEMME 9. *$\mathcal{P}(K, C)$ est fermé.*

Démonstration. Soit P^n une suite de mesures de probabilité appartenant à $\mathcal{P}(K, C)$ convergeant vers P dans $\mathcal{M}_+^1(\Omega)$ montrons que $P \in \mathcal{P}(K, C)$.

On considère la suite de mesures $Q_n = P^n \otimes dt$ sur $(\Omega \times [0, T], \mathcal{B} \otimes F)$ elle est étroitement convergente vers $Q = P \otimes dt$.

$P_n \in \mathcal{P}(K, C)$ il existe donc $c_n(s, \omega) \in C(s, X_s(\omega))$ prévisibles telles que $\forall \varphi \in C_b^{1,2}(0, T \times R^m)$. $\forall \Phi F_u$ mesurable continue

$$E^{P_n}\left\{\left[\varphi(t, X_t) - \varphi(u, x_u) - \int_u^t L_{c_n}\varphi(s, \omega)\, ds\right]\Phi\right\} = 0$$

de la suite c_nQ_n on peut extraire une sous-suite $c_{n'}Q_{n'}$ convergeant vers cQ, d'après la proposition 1, la projection prévisible $\hat{c}$ vérifie

$$E^P\left\{\left[\varphi(t, X_t) - \varphi(u, X_u) - \int_u^t L_{\hat{c}}\varphi(s, \omega)\, ds\right]\Phi\right\} = 0,$$

$$\hat{c}(s, \omega) \in C(s, X_s(\omega)). \qquad \text{c.q.f.d.}$$

LEMME 10. *$\mathcal{P}(y, C)$ est convexe.*

Démonstration. Soit P_1 et $P_2 \in \mathcal{P}(y, C)$. Il existe alors $c_1(s, \omega)$ et $c_2(s, \omega) \in C(s, \omega)$ prévisibles tels que $\forall \varphi \in C_b^{1,2}([0, T] \times R^m)$

$$\varphi(t, X_t) - \varphi(u, X_u) - \int_u^t L_{c_1}\varphi(s, \omega)\, ds \quad \text{est une } (P_1, F_t) \text{ martingale,} \tag{1.22}$$

$$\varphi(t, X_t) - \varphi(u, X_u) - \int_u^t L_{c_2}\varphi(s, \omega)\, ds \quad \text{est une } (P_2, F_t) \text{ martingale;} \tag{1.23}$$

alors notons:

$$c_\lambda(s, \omega) = \frac{\lambda c_1(s, \omega)\, dP_1 + (1-\lambda) c_2(s, \omega)\, dP_2}{\lambda\, dP_1 + (1-\lambda)\, dP_2},$$

$\hat{c}_\lambda(s, \omega)$ la projection prévisible de $c_\lambda(s, \omega)$

alors:

$$(1.24)\qquad \varphi(t, X_t)-\varphi(u, X_u)-\int_u^t L_{\hat{c}_\lambda}\varphi(s, \omega)\, ds \quad \text{est une } (\lambda P_1+(1-\lambda)P_2, F_t).$$

En effet, soit Φ continue F_u mesurable on a:

$$E_{\lambda P_1+(1-\lambda)P_2}\left\{\left[\varphi(t, X_t)-\varphi(u, X_u)-\int_u^t L_{\hat{c}_\lambda}\varphi(s, \omega)\, ds\right]\Phi\right\}$$

$$=E_{\lambda P_1+(1-\lambda)P_2}\left\{\left[\varphi(t, X_t)-\varphi(u, X_u)-\int_u^t L_{c_\lambda}\varphi(s, \omega)\, ds\right]\Phi\right\}$$

$$=\lambda E_{P_1}\left\{\left[\varphi(t, X_t)-\varphi(u, X_u)-\int_u^t L_{c_1}\varphi(s, \omega)\, ds\right]\Phi\right\}$$

$$+(1-\lambda)E_{P_2}\left\{\left[\varphi(t, X_t)-\varphi(u, X_u)-\int_u^t L_{c_2}\varphi(s, \omega)\, ds\right]\Phi\right\}=0.$$

Montrons que $c_\lambda(s, \omega)\in C(s, X_s(\omega))$. Notons

$$Q_1=\frac{1}{T}P_1\otimes dt, \qquad Q_2=\frac{1}{T}P_2\otimes dt;$$

$\forall f\in C_b^0(\Omega\times[0, T], R^m\times R^{m\times m})$

$$E^{\lambda Q_1+(1-\lambda)Q_2}c_\lambda\cdot\varphi=\lambda E^{Q_1}c_1\cdot\varphi+(1-\lambda)E^{Q_2}c_2\cdot\varphi$$

$$\leqq\lambda E^{Q_1}\operatorname*{Max}_{c\in C} c\,.\,\varphi+(1-\lambda)E^{Q_2}\operatorname*{Max}_{c\in C} c\,.\,\varphi$$

$$\leqq E^{\lambda Q_1+(1-\lambda)Q_2}\operatorname*{Max}_{c\in C} c\,.\,\varphi=\operatorname*{Max}_{c\in C} E^{\lambda Q_1+(1-\lambda)Q_2}c\,.\,\varphi.$$

En raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 1, on en déduit:

$$c_\lambda(s, \omega)\in C(s, X_s(\omega)) \qquad \lambda Q_1+(1-\lambda)Q_2 \quad \text{p.p.}$$

L'inégalité de Jensen montre alors que

$$\hat{c}_\lambda(s, \omega)\in C(s, X_s(\omega))$$

d'où le lemme. □

Soit $P\in\mathcal{P}(y, C)$ donnons quelques propriétés de la loi de probabilité du vecteur:

$$(X_0, X_h, X_{2h}, \cdots, X_{(n-1)h}, X_{nh}) \quad \text{avec } h=\frac{T}{n}.$$

Cette loi de probabilité peut s'écrire:

$$\delta_y(dx_0)\pi^1_{x_0}(dx_1)\pi^2_{x_0,x_1}(dx_2)\pi^3_{x_0,x_1,x_2}(dx_3)\cdots\pi^n_{x_0,x_1,\cdots x_{n-1}}(dx_n).$$

LEMME 11. *Il existe une constante $\delta(M_a, M_b, T)$ telle que*:

$$\sup_i \int \pi^i_{x_0,x_1,\cdots x_i}(dy)|y-x_i|^3\leqq\delta h^{3/2}.$$

Démonstration. La même que celle du lemme 8, utilisant le fait que $E^{X_0,\cdots X_{ih}}(\varphi)=E^{X_0,\cdots X_{ih}}E^{F_{ih}}(\varphi)$ avec φ variable aléatoire sur Ω.

Notons

$$C_{h,\varepsilon}(t,x)=\mathscr{C}_0 \bigcup_{\substack{t\leqq s\leqq t+h\\ |x-z|\leqq\varepsilon}} C(s,z)$$ où $\mathscr{C}_0$ désigne l'opération de fermeture convexe,

$$K^{\varepsilon}(t,\omega)=\{\omega:\ \sup_{t\leqq s\leqq t+h}|X_s(\omega)-X_t(\omega)|\leqq\varepsilon\},$$

$$\tau^{\varepsilon}_{x,t}=\inf\{s\geqq t|X_s-x|>\varepsilon\},$$

$$\tau^{\varepsilon,h}_{x,t}=\tau^{\varepsilon}_{x,t}\wedge(t+h)$$

$$\alpha:\Omega\to\Omega$$

$$\alpha:\omega\to\qquad\alpha(\omega),\qquad \alpha\omega(s)=\begin{cases}\omega(s), & s\leqq\tau^{\varepsilon,h}_{x,t},\\ \omega(\tau^{\varepsilon,h}_{x,t}), & s\geqq\tau^{\varepsilon,h}_{x,t}.\end{cases}$$

LEMME 12.

$$\left(\int (y-x)\pi^i(dy),\int (y-x)^{\otimes 2}\pi^i(dy)\right)\in[C_{h,\varepsilon}(t,x)h+\mathscr{V}_0(\beta)]\cap G$$

avec

$$t=(i-1)h,\qquad \beta=kh/\varepsilon^2,$$

où k est une constante ne dépendant que de C; $\mathscr{V}_0(\delta)$ désigne un voisinage de 0 de diamètre δ dans $R^m\times R^{(m\times(m+1))/2}$.

Si l'on note $\tilde F$ la tribu engendrée par $(X_0, X_h,\cdots,X_{(i-1)}h)$ $\int(y-x)\pi^i(dy)=E^{\tilde F}E^{F_{t_1}}[\int_{t_1}^{t_2}b(s,\alpha\omega)\,ds+\int_{t_1}^{t_2}(b(s,\omega)-b(s,\alpha\omega))\,ds]$.

L'utilisation de la formule d'Ito et la définition de π^i montre: $\int(y-x)^{\otimes 2}\pi^i(dy)=E^{\tilde F}E^{F_{t_1}}\int_{t_1}^{t_2}a(s,\alpha\omega)\,ds+\int_{t_1}^{t_2}(a(s,\omega)-a(s,\alpha\omega))\,ds+\int_{t_1}^{t_2}(X_s-X_{t_1})\otimes b(s,\omega)\,ds$

avec:

CK_ε l'ensemble complémentaire de K_ε,

$\alpha\omega$ construit à partir du temps d'arrêt $\tau^{\varepsilon,h}_{x,t_1}$,

$$t_1=(i-1)h,\qquad t_2=ih,$$

or

$$\left(\int_{t_1}^{t_2}b(s,\alpha\omega)\,ds,\int_{t_1}^{t_2}a(s,\alpha\omega)\,ds\right)\in C_{h,\varepsilon}(t,x)h,$$

$$E^{F_{t_1}}\int_{t_1}^{t_2}|b(s,\omega)-b(s,\alpha\omega)|ds\leqq hM_bP^{F_{t_1}}(CK_\varepsilon),$$

$$E^{F_{t_1}}\int_{t_1}^{t_2}|(X_s-X_{t_1})\otimes b(s,\omega)|ds\leqq hM_bE^{F_{t_1}}\sup_{t_1\leqq s\leqq t_2}|X_s-X_{t_1}|,$$

$$E^{F_{t_1}}\int_{t_1}^{t_2}|a(s,\omega)-a(s,\alpha\omega)|\,ds\leqq hM_aP^{F_{t_1}}(CK_\varepsilon).$$

Il reste à montrer que $\exists k$:

$$P^{\tilde F}(CK_\varepsilon)\leqq\frac{kh}{\varepsilon^2}$$

$$E^{\tilde F}\sup_{t_1\leqq s\leqq t_2}|X_s-X_{t_1}|\leqq\frac{kh}{\varepsilon^2}$$

or

$$\exists k_1 \quad \text{et} \quad k_2:$$

$$P(CK_\varepsilon) \leqq \sup_t P\left\{\omega: \sup_{t\leqq s\leqq t+h} |X_s - X_t| \geqq \varepsilon\right\}$$

$$\leqq \frac{1}{\varepsilon^2} E \sup_{t\leqq s\leqq t+h} |X_s - X_t|^2$$

$$\leqq \frac{k_1 h^2}{\varepsilon^2} + \frac{k_2 h}{\varepsilon^2}$$

le deuxième terme étant obtenu en utilisant le théorème de Doob $E\{\sup_{s\leqq t} M_s^2\} \leqq EM_t^2$ si M_t est une martingale de carré intégrable.

De même,

$$E^{F_{t_1}} \sup_{t_1\leqq s\leqq t_2} |X_s - X_{t_1}|^2 \leqq k_1 h^2 + k_2 h$$

d'où le lemme. □

2. Contrôle optimal de problèmes de martingale.

2.1. Définition du problème. Soit $\Phi: R^m \to R$ s.c.i., bornée, une fonction coût. On se pose le problème de contrôle stochastique suivant:

$$\min_{P\in\mathcal{P}(y,\, C)} E^P \Phi(X_T). \tag{2.1}$$

2.2. Existence d'une solution.

THÉORÈME 4. *Le problème de contrôle* (2.1) *admet une solution.*

Démonstration. L'application

$$\Omega \to R^m \qquad \text{est continue}$$
$$\omega \quad X_T(\omega)$$

Φ étant s.c.i.

$$\Phi \circ X_T: \Omega \to R \quad \text{est donc s.c.i.}$$

L'application

$$\mathcal{M}_+^1(\Omega) \to R$$
$$P \qquad E^P \Phi \circ X_T$$

est donc s.c.i. grâce au théorème 5.5 [7].

Grâce au théorème 3, on sait que $\mathcal{P}(y, C)$ est un compact, convexe, non vide de $\mathcal{M}_+^1(\Omega)$. On obtient donc le théorème.

Remarque. Soit $\tau(\omega)$ le temps de sortie d'un ouvert, alors l'application:

$$\omega \to \tau(\omega) \quad \text{est s.c.i.}$$

Considérons le problème de contrôle stochastique

$$\min_{P\in\mathcal{P}(y,\, C)} E^P X_m(\tau(\omega), \omega);$$

les problèmes de contrôle avec coût seulement intégral peuvent toujours s'écrire de cette façon, de plus, dans ce dernier cas si l'intégrande est positif. $t \to X_m(t, \omega)$ est P p.s.

croissante $\forall P \in \mathscr{P}(y, C)$ et l'application

$$\omega \to E^P X_m(\tau(\omega), \omega) \quad \text{sera alors s.c.i.}$$

On aura encore existence du contrôle optimal dans ce cas.

Pour des problèmes arrêtés plus généraux, coûts sur l'état final il faudra pour pouvoir être assuré de l'existence, montrer que le temps de sortie de l'ouvert et du fermé sont P p.s. les mêmes $\forall P \in \mathscr{P}(y, C)$. Ce qui est vrai au moins dans le cas non dégénéré [22], et dans certains cas dégénérés également [22].

2.3. Caractérisation d'un contrôle optimal (discrétisation en temps).

2.3.1. Définition d'un problème de contrôle optimal approché. On considère la multiapplication

$$(s, x) \to C_{h,\varepsilon}(s, x) \quad \text{avec} \quad C_{h,\varepsilon}(s, x) = \bar{\mathscr{C}}_0\Big\{ \bigcup_{\substack{\varepsilon \leqq t \leqq s+h \\ |y-x| \leqq \varepsilon}} C(t, y)\Big\}.$$

LEMME 14. *$C_{h,\varepsilon}(s, x)$ est une multiapplication s.c.s. convergeant (au sens de la distance de Hausdorff) ponctuellement en décroissant vers la multiapplication $C(s, x)$ lorsque $h \downarrow 0$ $\varepsilon \downarrow 0$.*

Démonstration. $C_{h,\varepsilon}(s, x)$ est s.c.s. Il suffit de montrer que $C_{h,\varepsilon}(s, x)$ est de graphe fermé c.a.d. soit

$$(s_n, x_n, c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (s, x, c) \quad c_n \in C_{h,\varepsilon}(s_n, x_n)$$

Montrons que $c \in C_{h,\varepsilon}(s, x)$

$$c_n \in C_{h,\varepsilon}(s_n, x_n) \quad \Rightarrow \quad \text{il existe:}$$

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} &d_{n,i}, && i = 1, \cdots, \frac{m(m+1)}{2} + m + 1; \\ &\lambda_{n,i}, && \lambda_{n,i} \geqq 0, \quad \sum_i \lambda_{n,i} = 1,; \\ &s_{n,i}, && 0 \leqq s_{n,i} - s_n \leqq h;; \\ &x_{n,i}, && |x_{n,i} - x_n| \leqq \varepsilon, \\ &d_{n,i} \in C(s_{n,i}, x_{n,i}), && C_n = \sum_i \lambda_{n,i} d_{n,i}. \end{aligned}$$

$(s_{n,i}, x_{n,i}, \lambda_{n,i}, d_{n,i})$ appartenant à un compact, il existe une sous-suite:

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} &s_{n',i} \xrightarrow[nn'\to\infty]{} s_i, && 0 \leqq s_i - s \leqq h, \\ &x_{n',i} \xrightarrow[n'\to\infty]{} x_i && |x_i - x| \leqq \varepsilon, \\ &\lambda_{n',i} \xrightarrow[n'\to\infty]{} \lambda_i && \lambda_i \geqq 0, \quad \sum \lambda_i = 1, \\ &d_{n',i} \xrightarrow[n'\to\infty]{} d_i && d_i \in C(s_i, x_i) \text{ car } C \text{ est s.c.s.} \end{aligned}$$

et donc

$$\sum \lambda_i d_i \in \bar{\mathscr{C}}_0\left\{ \bigcup_{\substack{|y-x|\leqq\varepsilon \\ 0\leqq t-s\leqq h}} C(t, y)\right\}$$

d 'où le résultat.

$$\lim_{\substack{h\downarrow 0\\ \varepsilon\downarrow 0}} d(C_{h,\varepsilon}(s, x), C(s, x)) = 0. \tag{2.4}$$

En effet, $C_{h,\varepsilon}(s, x)$ étant compact

$$\begin{aligned}\overline{\bigcap_{h,\varepsilon} C_{h,\varepsilon}(s, x)} &= \{c \mid \exists c_n \in C_{h_n,\varepsilon_n}(s, x),\ c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c,\ h_n\downarrow 0,\ \varepsilon_n \downarrow 0\}\\
&\subset \Big\{ c \mid \exists (s_{n,i}, x_{n,i}, \lambda_{n,i}, d_{n,i})\\
&\qquad s_{n,i} \xrightarrow[n\to\infty]{} s_i,\ x_{n,i} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i,\ \lambda_{n,i} \to \lambda_i \sum_i \lambda_{n,i} = 1,\ \lambda_{n,i} \geqq 0\\
&\qquad\qquad d_{n,i} \in C(s_{n,i}, x_{n,i}),\ c_n = \sum_i \lambda_{n,i} d_{n,i}\Big\}\\
&\subset \Big\{ c \mid c \in C(s, x)\Big\} \text{ car } c_n \to c = \sum \lambda_i d_i,\\
&\qquad \lambda_i = \lim_{n'} \lambda_{n',i},\ d_{n',i} \xrightarrow[n'\to\infty]{} d_i,\ \lambda_i \geqq 0, \sum \lambda_i = 1,\end{aligned}$$

$d_i \in C(s, x)$ car C est de graphe fermé, et $c \in C(s, x)$ car C est à valeur convexe, et donc

$$\overline{\bigcap_{h,\varepsilon} C_{h,\varepsilon}(s, x)} = C(s, x) \tag{2.5}$$

l'inclusion dans l'autre sens étant évidente.

Supposons que (2.4) soit fausse, la décroissance de $C_{h,\varepsilon}$ lorsque $h\downarrow 0$ et $\varepsilon\downarrow 0 \Rightarrow$ $\exists h_n, \varepsilon_n, y_n \in C_{h_n,\varepsilon_n}(s, x), d(y_n, C(s, x)) > \varepsilon$;

$$y_n \in \text{Compact},\ \exists n',\ y_{n'} \to y \text{ et } d(y, C(s, x)) \geqq \varepsilon$$

or

$$y \in \overline{\bigcap_{h_n,\varepsilon_n} C_{h_n,\varepsilon_n}(s, x)} = C(s, x)$$

d'où la contradiction. □

Considérons la multiapplication $C_n = [C_{1/n,(1/n)^\gamma} + \mathscr{V}^*(0, kn^{2\gamma}/n)] \cap G$ avec $0 < \gamma < \frac{1}{2}$,[3] k défini au lemme 12. On a $C_n(s, x) \searrow C(s, x)$ pour la topologie de Hausdorff grâce au lemme 14. Considérons la multiapplication

$$\prod^n : (s, x) \to \prod_{(s,x)}^{n, C_n, \delta, 3/2, 3} \text{ (que nous noterons } \prod^n)$$

avec δ défini au lemme 11.

[3] $\mathscr{V}^*(0, \rho)$ désigne la boule fermé de centre 0 et de rayon ρ dans $R^{m\times(m+1)/2}$. R^m.

C_n étant s.c.s. Π^n est s.c.s. (proposition 0). Considérons le problème de Programmation dynamique

$$
(2.6)\qquad
\begin{aligned}
&V_n(T,x)=\Phi(x) \quad \text{avec } \Phi(T,\cdot) \text{ s.c.i.},\\
&V_n((n-1)h,x)=\min_{\pi\in\Pi^n((n-1)h,x)}\int V_n(T,y)\pi(dy),\\
&V_n(ih,x)=\min_{\pi\in\Pi^n(ih,x)}\int (V_n(i+1)h,y)\pi(dy),\\
&V_n(0,x)=\min_{\pi\in\Pi^n(0,x)}\int V_n(h,y)\pi(dy).
\end{aligned}
$$

THÉORÈME 5. *Le problème* (2.6) *admet une solution de plus $V(ih, x)$ est s.c.i. $\forall i$.*

Démonstration. On le démontre par récurrence. L'application:

$$\pi\to\int V_n(T,y)\pi(dy)$$

est s.c.i. car Φ est s.c.i. $\Pi^n((n-1)h, x)$ est à valeur compacte car elle est s.c.s.

Et donc $\min_{\pi\in\Pi^n((n-1)h,x)}\int V_n(T,y)\pi(dy)$ existe et $V(T-h, x)$ est s.c.i. grâce au théorème du maximum [2].

Il existe $\pi^*(ih, x)$, borélienne en x, réalisant le minimum. A π^* associons $P^n_{\pi^*}$ par la méthode exposée en § 1.2.2. $\{P^n_{\pi^*}\}$ est étroitement relativement compacte grâce au lemme 3, car les C_n sont décroissants, et C_1 vérifie les hypothèses du lemme 3.

Par la méthode exposée dans le théorème d'existence, en remplaçant partout C par C_n, on obtient que toute sous-suite convergente de $P^{n'}_{\pi^*}\xrightarrow[n'\to\infty]{} P\in\mathcal{P}(y, C)$

THÉORÈME 6. (*Caractérisation d'un contrôle optimal*). *Si $\{P^n_{\pi^*}\}$ désigne la suite de mesure sur Ω définie, par interpolation linéaire, sur la chaîne de Markov, solution du problème de contrôle discrétisé, de probabilité de transition π^*_n; $\{P^n_{\pi^*}\}$ est étroitement relativement compacte, et toute sous-suite convergente converge vers un élément de $P^*\in\mathcal{P}(y, C)$ solution du problème de contrôle optimal* (2.1).

Démonstration. On a démontré l'admissibilité de P^* démontrons son optimalité. Pour cela, supposons que $\tilde{P}$ [resp $\tilde{V}$] désigne un contrôle optimal [resp le coût optimal] du problème (2.1) et considérons la loi du vecteur $(X_0, X_h, X_{2h},\ldots, X_{nh})$. Elle peut s'écrire:

$$\delta_y(dx_0)\pi^0_{x_0}(dx_1)\pi^1_{x_0,x_1}(dx_2)\cdots\pi^{n-1}_{x_0,x_1\cdots,x_{n-1}}(dx_n)$$

Grâce au lemmes 11, 12 et la définition de C_n, on vérifie que $\pi^i_{x_0,\cdots x_i}\in\Pi^n(ih, x_i)$ et donc

$$V_n(0,x_0)\leqq\tilde{V}\quad\forall n$$

or,

$$V_n(0,x_0)=E_{P^n_{\pi^*}}\Phi(X_T),\ \Phi \text{ étant s.c.i.}$$

$$\tilde{V}\geqq\liminf_{n\to\infty} V_n\geqq E_{P^*}\Phi(X_T) \text{ c.q.f.d.}$$

2.4. Caractérisation d'un contrôle optimal (discrétisation en temps et en espace).

2.4.1. Définition d'un problème de contrôle optimal de chaîne de Markov à état discret. Soit la multiapplication $C_{h,\varepsilon,k}(s, x)$ dont le graphe est défini par:

$$\overline{\left\{(s,x,c)\,\middle|\,c\in\mathscr{C}_0\left\{\bigcup_{\substack{-\varepsilon+ik\leqq y\leqq(i+1)k+\varepsilon\\ s\leqq t\leqq s+h}} C(s,y),\ x\in[ik,(i+1)k]\right\}\right.}.$$

$C_{h,\varepsilon,k}$ est donc une multiapplication s.c.s., constante par morceaux en x, à valeur convexe.

Remarque.

$$C_{h,\varepsilon,0}(s,x)=\overline{\mathscr{C}}_0\{C_{h,\varepsilon}(s,x)\}.$$

LEMME 15. *$C_{h,\varepsilon,k}(s,x)$ est une multiapplication s.c.s. à valeur convexe convergeant ponctuellement, en décroissant, au sens de la distance de Hausdorff, vers la multiapplication $C(s,x)$ lorsque h, ε, k tendent vers 0 en décroissant.*

Démonstration.

$$\lim_{\substack{h\downarrow 0\\ \varepsilon\downarrow 0\\ k\downarrow 0}} d(C_{h,\varepsilon,k}(s,x), C(s,x))=0. \tag{2.7}$$

En effet, $C_{h,\varepsilon,k}(s,x)$ *étant compact*:

$$\overline{\bigcap_{h,\varepsilon,k} C_{h,\varepsilon,k}(s,x)}\subset\Big\{c\,|\,\exists(c_n, s_n, x_n) s_n\to s,\ x_n\to x,\ c_n\to c$$

$$c_n\in\mathscr{C}_0\Big\{\bigcup_{\substack{s_n\leqq t\leqq s_n+h_n\\ x_n-2k_n-\varepsilon_n\leqq y\leqq x_n+2k_n+\varepsilon_n}} C(t,y)\Big\},\ h_n,\varepsilon_n,k_n\downarrow 0\Big\};$$

c.a.d.

$$c_n=\sum_i d_{n,i}\lambda_{n,i},\quad \lambda_{n,i}\geqq 0,\quad \sum\lambda_{n,i}=1,\quad d_{n,i}\in C(t_{n,i},y_{n,i}),\ i=1,\cdots,m+m(m+1)/2+1,$$

$$|x-y_{n,i}|\leqq 2k_n+\varepsilon_n+|x_n-x|,\qquad |s-t_{n,i}|\leqq h_n+|s_n-s|,$$

et donc, grâce à la s.c.s. de $C(s,x)$

$$d_{n,i}\xrightarrow[n\to\infty]{} d_i\in C(s,x)$$

$$\lambda_{n,i}\xrightarrow[n\to\infty]{}\lambda_i,\ \lambda_i\geqq 0,\qquad \sum\lambda_i=1$$

$$c_n\to c=\sum\lambda_i c_i$$

et en utilisant la convexité de C, $c\in C(s,x)$; et donc

$$\overline{\bigcap_{h,\varepsilon,k} C_{h,\varepsilon,k}(s,x)}=C(s,x). \tag{2.8}$$

Supposons que (2.7) soit fausse, en utilisant la décroissance de $C_{h,\varepsilon,k}(h,\varepsilon,k)\downarrow 0$ on a:

$$\exists(h_n,\varepsilon_n,k_n)\downarrow 0,\quad y_n\in C_{h_n,\varepsilon_n,k_n}(s,x)\quad\text{et}\quad d(y_n, C(s,x))>\varepsilon.$$

$y_n\in$ compact, $\exists$ une sous-suite convergeant vers y et donc

$$d(y, C(s,x))\geqq\varepsilon \text{ or } y\in\overline{\bigcap_{h,\varepsilon,k} C_{h,\varepsilon,k}(s,x)}=\bigcap_{h,\varepsilon,k} C_{h,\varepsilon,k}(s,x)=C(s,x)$$

d'où la contradiction. □

Notons

$$r_k y=\left[\frac{y}{k}\right]k+\frac{k}{2}.$$

On a:

LEMME 16. $\exists M(\rho, k)$ et $\rho_1(\rho, k)$

(2.9) $$\left|\int (y-x)\pi(dy) - \int [r_k(y)-r_k(x)]\pi(dy)\right| \leqq k,$$

(2.10) $$\left|\int (y-x)^{\otimes 2}\pi(dy) - \int [r_k(y)-r_k(x)]^{\otimes 2}\pi(dy)\right| \leqq Mk,$$

(2.11) $$\int |r_k(y)-r_k(x)|^3\pi(dy) \leqq \rho_1(\rho, k), \quad \forall \pi \in \mathcal{M}_+^1(R^m): \int \pi(dy)(y-x)^3 \leqq \rho.$$

Démonstration. (2.9) est évident. (2.10) résulte de

$$\begin{aligned} |(y-x)^{\otimes 2} - (r_k(y)-r_k(x))^{\otimes 2}| & \\ &\leqq M_1|(y-x)-(r_k(y)-r_k(x))|\,|(y-x)+r_k(y)-r_k(x)| \\ &\leqq M_1 k \int (2|y-x|+k)\pi(dy). \end{aligned}$$

L'inégalité de Holder donne alors (2.10).

(2.11) résulte de $|r_k(y)-r_k(x)| \leqq |y-x|+k$.

Considérons les multiapplications:

$$C_n = \left[C_{1/n,(1/n)^\gamma} + \mathcal{V}\left(\frac{Mn^{2\gamma}}{n}\right)\right] \cap G$$

$$\bar{C}_n = \left[C_{1/n,(1/n)^\gamma,(1/n)^\theta} + \mathcal{V}\left(\frac{Mn^{2\gamma}}{n} + M\left(\frac{1}{n^{\theta-1}}\right)\right)\right] \cap G, \qquad 0<\gamma<\tfrac{1}{2}, \qquad \theta>1$$

M constante suffisamment grande.

On a C_n est une multiapplication s.c.s., constante par morceaux en x, convergeant ponctuellement pour la topologie de Hausdorff grâce au lemme 15.

Considérons la multiapplication $(s, x) \to \bar{\Pi}^{n,\bar{C}_n,\delta,3/2,3,(1/n)^\theta}$ que nous dénoterons $\bar{\Pi}^n$ avec

$$\bar{\Pi}^{n,\bar{C},\rho,\alpha,\beta,k} = \left\{\pi \in \mathcal{M}_+^1(R^m), \left(\int [r_k(y)-r_k(x)]\pi(dy), \int [r_k(y)-r_k(x)]^{\otimes 2}\pi(dy)\right) \in \bar{C}(s, x)h \right.$$
$$\left. \int |r_k(y)-r_k(x)|^\beta \pi(dy) \leqq \rho h^\alpha\right\}.$$

Grâce au lemme 16, on a:

$$\pi \in \Pi^{n,C_n,\delta,3/2,3}(s, x) \quad \Rightarrow \quad \pi \in \bar{\Pi}^{n,\bar{C}_n,\delta,3/2,3,(1/n)^\theta}(s, x)$$

Soit Φ_n s.c.i. constante par morceaux $\Phi_n =$ régularisée s.c.i. $\sum \Phi_n^i \chi_{[ik,(i+1)k]}$, $\Phi_n \nearrow_n \Phi$ ponctuellement, $\Phi_n^i = \operatorname{Inf} \Phi(x)_{x \in [ik,(i+1)k]}$, Φ s.c.i., $k = 1/n^\theta$.

Considérons le problème de programmation dynamique

(2.12)
$$\begin{aligned} \bar{V}_n(T, x) &= \Phi_n(x), \\ \bar{V}_n((n-1)h, x) &= \min_{\pi \in \bar{\Pi}^n((n-1)h,x)} \int \bar{V}_n(T, y)\pi(dy), \\ \bar{V}_n(ih, x) &= \min_{\pi \in \bar{\Pi}^n(ih, x)} \int (\bar{V}_n(i+1)h, y)\pi(dy), \\ \bar{V}_n(0, x) &= \min_{\pi \in \bar{\Pi}^n(0, x)} \int \bar{V}_n(h, y)\pi(dy). \end{aligned}$$

THÉORÈME 7. *Le problème* (2.12) *admet une solution, de plus*, $\bar{V}(ih, x)$ *est s.c.i. constante par morceaux.*

Démonstration. On le démontre par récurrence. L'application: $\pi \to \int \bar{V}_n(T, y)\pi(dy)$ est s.c.i. car Φ_n est s.c.i.

$\bar{\Pi}^n((n-1)h, x)$ est à valeur compacte car elle est s.c.s. (démonstration analogue à la s.c.s. de Π^n) et donc $\min_{\pi\in\bar{\Pi}^n((n-1)h,x)} \int V_n(T, y)\pi(dy)$ existe et $\bar{V}_n(T-h, x)$ est s.c.i. grâce au théorème du maximum [2]. $\bar{V}_n(T-h, x)$ est constante par morceaux car $x \to \bar{\Pi}^n(T-h, x)$ l'est. □

Il existe donc $\bar{\pi}_n^*(ih, x)$, borélienne en x, constante par morceaux réalisant le minimum.

A $\bar{\pi}_n^*$ associons $P^n_{\bar{\pi}_n^*}$ par la méthode exposée en 1.2.2.

$\{P^n_{\bar{\pi}_n^*}\}$ est étroitement relativement compacte grâce aux lemmes 3 et 16.

Par la méthode exposée dans le théorème d'existence, en remplaçant C par $\bar{C}_n$ on obtient que toute sous-suite convergente de $P^{n'}_{\bar{\pi}_n^*} \to P \in \mathcal{P}(k, C)$ grâce au lemme 16.

THÉORÈME 8. (*Caractérisation d'un contrôle optimal, discrétisation en temps et en espace*). *Si* $\{P^n_{\bar{\pi}_n^*}\}$ *désigne la suite de mesure sur* Ω *définie par interpolation linéaire, sur la chaîne de markov, solution du problème discrétisé* (2.12) *de probabilité de transition* $\bar{\pi}_n^*$; $\{P^n_{\bar{\pi}_n^*}\}$ *est étroitement relativement compacte et tout point adhérent est solution du problème de contrôle optimal* (2.1).

Démonstration. On a démontré l'admissibilité de P^*, démontrons son optimalité; pour cela, il suffit de remarquer que: si $\tilde{P}$ désigne un contrôle optimal, $\tilde{V}$ le coût optimal du problème 2.1, la loi du vecteur; $(X_0, X_h, X_{2h}, \cdots, X_{nh})$ peut s'écrire $\pi^0_{x_0}(dx_1)\times \pi^1_{x_0,x_1}(dx_2)\cdots \pi^{n-1}_{x_0,\cdots,x_{n-1}}(dx_n)\delta_y(dx_0)$ et grâce au lemmes 11 et 12, à la définition de $\bar{C}_n$ et au lemme 14, que

$$\pi^i_{x_0,\cdots x_i} \in \bar{\Pi}^n(ih, x)$$

et donc

$$E^{P^n_{\bar{\pi}_n^*}}(\Phi_n) = \bar{V}_n(0, x_0) \leqq E^{\tilde{P}}\Phi_n \leqq E^{\tilde{P}}(\Phi)$$

car $\Phi_n \leqq \Phi$.

Grâce au lemme 7, on a:

$$E^{P^*}\Phi \leqq \liminf_n E^{P^n_{\bar{\pi}_n^*}}\Phi_n \leqq E^{\tilde{P}}(\Phi) \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Sur la résolution numérique du problème (2.12). Nous avons vu que le $\pi^{*n}_{s,x}(dy)$ est constant par morceaux ainsi que V^n.

Notons alors $P^{*i}_{j,j'} = \bar{P}^n_{\bar{\pi}_n^*}(x_{(i+1)h} \in A_j | x_{ih} \in A_i)$ où, $\bar{P}^n_{\bar{\pi}_n^*}$ désigne la loi de probabilité construite sur $R^{(n+1)\times m}$ à partir de $\bar{\pi}_n^*$ comme en (1.8), $A_j = [j/2^n, (j+1)/2^n] + j/2^{(n+1)}$.

Notons $\bar{V}^i_{n,j}$ le coût optimal sur le $j$ème morceau à l'instant ih (2.12) se réecrit:

$$\bar{V}^n_{n,j} = \Phi_{n,j}$$

$$\bar{V}^{i-1}_{n,j} = \operatorname*{Min}_{p_{j'}} \sum_{j'} p_{j'}\bar{V}^i_{n,j'} \qquad \left(\sum_{j'} p_{j'}(j'-j), \sum_{j'} p_{j'}(j'-j)^{\otimes 2}\right) \in \bar{C}^n_{i,j}, \tag{2.13}$$

$$\left(\sum_{j'} p_{j'}|j'-j|^3 \leqq \bar{\rho} h^{3/2}\right)$$

$$\bar{V}^0_{n,j} = \operatorname*{Min}_{p_{j'}} \sum_{j'} p_{j'}\bar{V}^1_{n,j'}.$$

Le résultat de l'optimisation sera $p^{*i}_{j,j'}$.

Chaque étape de la récurrence de (2.13) est un problème de programmation mathématique dans R^q, minimisation d'une forme linéaire sous des contraintes convexes, $q = \mathrm{Card}\{j\}$.

3. Quelques resultats particuliers. Soit $\{C_n\}$ une suite de multiapplication s.c.s. à valeur convexe dans un compact fixe $C_n \underset{n\nearrow\infty}{\downarrow} C$ ponctuellement; $(s, x) \to \tilde{\Pi}^{n,C_n,\rho,\alpha,\beta}(s, x)$ une multiapplication à valeur dans $\mathcal{M}_+^1(R^m)$ vérifiant

$$\text{(3.1)}\quad \begin{aligned}&\forall \pi \in \tilde{\Pi}^{n,C_n,\rho,\alpha,\beta}(s, x) \quad \Rightarrow \quad \left(\int (y-x)\pi(dy), \int (y-x)^{\otimes 2}\pi(dy)\right) \in C_n(s, x)h,\\ &\int |y-x|^\beta \pi(dy) \leqq \rho h^\alpha;\end{aligned}$$

$$\text{(3.2)}\quad \begin{aligned}&\forall c \in C(s, x) \exists \pi \in \tilde{\Pi}^{n,C_n,\rho,\alpha,\beta}(s, x)\left(\int (y-x)\pi(dy), \int (y-x)^{\otimes 2}\pi(dy)\right) \in ch,\\ &\int |y-x|^\beta \pi(dy) \leqq \rho h^\alpha, \qquad \beta > 2, \quad \alpha > 1.\end{aligned}$$

On suppose de plus que $\tilde{\Pi}^{n,C_n,\rho,\alpha,\beta}$ est s.c.s.

Remarque. Ici, $\tilde{\Pi}^{n,C_n}$ ne représente plus toutes les lois de probabilités ayant le couple (dérive, diffusion) dans C_n, mais seulement une famille de probabilités donnant tous les $c \in C_n$ possibles. Pratiquement, il peut être intéressant de se limiter à une telle famille. Par exemple, on fixe le support de la probabilité de transition (chaîne de markov particulière à état discret).

On construit un problème approché (2.6) en remplaçant Π^n par $\tilde{\Pi}^{n,C_n,\rho,\alpha,\beta}$. Ce problème admet alors une solution optimale que l'on notera $\pi^{*n}_{s,x}$.

Si l'on note P_n la loi de probabilité définie sur les fonctions continues par π^{*n} on a la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Si P désigne un point adhérent à la suite $\{P_n\}$, Φ une fonction continue*

$$E^P\Phi(X_T) \leqq \operatorname*{Inf}_{\substack{K',C'\\K'\subset K\\C'\subset C}} \sup_{P'\in\mathcal{P}(K',C')} \Phi(X_T).$$

Démonstration. $\exists$ une sous-suite encore, notée n:

$$P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P \in \mathcal{P}(K, C).$$

Soit $c'_n \in C'_n$ il lui correspond $\pi'_n \in \tilde{\Pi}^{n,C'_n}$ et donc P'_n mesure sur les fonctions continues, et donc $\exists$ s.s. encore noté n (avec $C'_n \subset C_n$, $C'_n \downarrow C'$):

$$P'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P' \in \mathcal{P}(K', C')$$

or, on a $E^{P_n}\Phi(X_T) \leqq E^{P'_n}\Phi(X_T)$ et donc, en passant à la limite:

$$E^P\Phi(X_T) \leqq \sup_{P'\in\mathcal{P}(K',C')} E^{P'}\Phi(X_T)$$

d'où la proposition. □

De cette proposition, on déduit un corollaire lorsque le couple (K', C') est tel qu'il y ait unicité au problème de martingale.

COROLLAIRE. Sous les hypothèses de la proposition 2:

$$E^P\Phi(X_T) \leqq \operatorname*{Inf}_{\substack{\left.\begin{matrix}a(t,x)\\ b(t,x)\end{matrix}\right\}\text{lipschitz en } x \text{ continue en } t\\ (a,b)\in C\\ x\in K}} E^{P^{x,a,b}}\Phi(X_t)$$

où $P^{x,a,b}$ désigne la solution du problème de martingale au sens classique [22].

Remarque. Un résultat de ce type dans un cadre moins général est démontré dans [14].

Remarque. Le contre exemple suivant montre que dans le cas où a dégénère, on ne peut espérer mieux.

Considérons:

$$\dot{x} = g(x), \qquad g = 2\operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}, \qquad x(0) = 0.$$

Cette équation admet au moins trois solutions:

$$x = 0,$$

$$x = \pm t^2.$$

Supposons que l'on veuille maximiser $Ef_M(X_T)$ sur $\mathscr{P}(0, (0, g))$ avec

$$f_M(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqq M, \\ M^2 & \text{si } x \geqq M. \end{cases}$$

La solution de ce problème sera la mesure de Dirac sur la solution $x = t^2$ or,

$$\Pi^{n,(0,g)}(s, 0) = \delta_0$$

et donc, P^n sera la masse de Dirac sur la trajectoire $x = 0$ qui n'est pas la bonne solution.

Remarque. On a toujours supposé que C_n est à valeur convexe. Notons $\bar{C}_n$ le convexifié de C_n. Alors $\Pi^{n,\bar{C}_n}$ est le convexifié de Π^{n,C_n} et donc les coûts V_n et $\bar{V}_n$ associés sont les mêmes, $\exists \pi^n$ optimal pour $\Pi^{n,\bar{C}_n}$ appartenant à Π^{n,C_n}. Cette remarque montre que dans le cas où C n'est pas convexe, on peut trouver une suite $c_n \in C$ optimal tel que la conclusion de la proposition 2 soit vérifiée.

Un cas particulier important.

$$C(s, x) = B(s, x) \otimes a(s, x),$$

B multiapplication s.c.s. à valeur dans R^{m+1}, $a(s, x)$ fonction continue > 0.

On considère le problème

$$\operatorname*{Min}_{(b_0,P)\in\tilde{\mathscr{P}}(y,C)} E^P \int_0^t b_0(s, x_s)\, ds + \Phi(X_T)$$

où $\tilde{\mathscr{P}}(y, c)$ désigne l'ensemble couples (fonction borélienne, mesure de probabilités, solution du problème de martingale $(b_1, \cdots, b_m; a)$) tels que $(b_0, b_1, \ldots, b_m)\otimes a \in C$, $(b_0, \cdots, b_m)(s, \omega)$ prévisible.

THÉORÈME 9.

$$\operatorname*{Min}_{(b_0,P)\in\tilde{\mathscr{P}}(y,C)} E^P \int_0^T b_0(s, X_s)ds + \Phi(X_T) = \operatorname*{Inf}_{\substack{b\\ \text{section lipschitz en } x,\\ \text{continue en } t \text{ de } B}} E^{P^{y,b,a}} \int_0^T b_0(s, X_s)\, ds + \Phi(X_T).$$

Démonstration. On sait [4, th.IV.6]

$$\underset{\substack{b(s,x)\in B(s,x)\\ b \text{ borélienne}}}{\operatorname{Min}} E^{P_{y,b,a}} \int_0^t b_0(s, x_s)\, ds + \Phi(X_T)$$

$$= \underset{\substack{b(s,\omega)\in B(s,X_s(\omega))\\ b \text{ progressivement}\\ \text{mesurable.}}}{\operatorname{Min}} E^{P_{y,b,a}} \int_0^t b_0(s, \omega)\, ds + \Phi(X_T)$$

et on sait que les minimums existent. À $(b_1(s, x), \cdots, b_n(s, x)) \to P$ unique [22] et donc minimiser par rapport à $b \in B$ ou a $(b_0, P) \in \tilde{\mathscr{P}}(y, C)$ donne le même coût optimal.

Soit donc $b^*(s, x) \in \operatorname{Arg}\min_{b\in B} E \int_0^T b_0(s, X_s)\, ds + \Phi(X_T)$. $\exists\{b_n\}$ lipschitz en x, continu en t

$$b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b^* \text{ dans } \sigma(L^\infty([0, T]\times R^m), L^1([0, T]\times R^m))$$

et le th IV.3 de J. M. Bismut [4] montre que

$$E^{P(y, b_1^n \cdots, b_m^n, a)} \int_0^T b_n^0(s, X_s)\, ds + \Phi(X_T) \xrightarrow[n\to\infty]{} E^{P(y, b_1^* \cdots b_m^*, a)} \int_0^T b^0(s, X_s)\, ds + \Phi(X_T),$$

et donc P construit au début du § 3 est optimal dans ce cas particulier.

REFERENCES

[0] A. BENSOUSSAN AND J. LESOURNE, *An unreverisble investment*, Cahier des Mathématiques de la Décision, Paris IX, 1976.

[1] A. BENSOUSSAN AND J. L. LIONS, *Applications des inéquations variationnelles en Contrôle Stochastique*, Dunod, Paris 1978.

[2] C. BERGE, *Espace topologique, fonctions multivoques*, Dunod, Paris, 1959.

[3] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*, J. Wiley, New York, 1968.

[4] J. M. BISMUT, *Th. Prob. du contrôle des diffusions*, Mémoires American Mathematical Society, Vol. 4, n° 167, 1976.

[5] N. BOURBAKI, *Integration*, Ch. IX, Herman, Paris.

[6] C. CASTAING, *Sur les multiapplications mesurables*, RIRO, n° 1 (1967), pp 91–126.

[7] C. DELACHERIE AND P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel*, Herman, Paris, 1975.

[8] F. DELEBECQUE AND J. P. QUADRAT, *Contribution of stochastic control, singular perturbation, averaging and team theories to an example of large scale systems: Management of hydropower production*,. IEEE Trans. Automatic Control, AC-23 (1978), pp. 209–222.

[9] I. EKELAND AND R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnelles*, Dunod, Paris, 1974.

[10] W. H. FLEMING AND W. RISHEL, *Optimal Deterministic and Stochastic Control*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[11a] M. GOURSAT AND J. P. QUADRAT, *Analyse numérique d'inégalités variationnelles elliptique associées à des problèmes de temps d'arrêt optimal en contrôle stochastique.* Rapport IRIA-Laboria n° 154, Rocquencourt, France 1976.

[11b] ———, *Analyse numérique d'inégalités quasi-variationnelles elliptique associées à des problèmes de contrôle impulsionnel*, Rapport IRIA-Laboria n° 186, Rocquencourt, France, 1976.

[12] N. V. KRILOV, *On control of the solution of a stochastic integral equation with degeneration*, Izv. Akad. Nauk USSR, Ser. Math., 36 (1972), pp. 249–262.

[13] H. KUSHNER, *A survey of some applications of probability and stochastic control theory to finite diffusion methods for degenerate elliptic and parabolic equations*, SIAM Review, 18 (1976), pp. 545–577.

[14] H. KUSHNER AND CHEN-FU-YU, *Approximation, existence and numerical procedures, for optimal stochastic control*, J. Math. Appl., 45 (1974), pp. 563–587.

[15] P. J. LAURENT, *Approximation et optimisation*, Herman, Paris, 1972.

[16] R. C. MERTON, *Lifetime Portefolio selection underuncertainty, the continuous case.* Rev. Econ. Statist., LI, pp. 247–257.

[17] J. NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des probabilités,* Masson, Paris, 1964.

[18] P. PRIOURET, *C.R. Ecole d'Eté de St. Flour,* Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[19] J. P. QUADRAT, *Analyse numérique de l'équation de Bellman stochastique,* Rapport de Recherche IRIA-Laboria n° 140, Rocquencourt, France, 1975.

[20] M. ROBIN, *Contrôle impulsionnel des processus de Markov,* Thèse, Paris IX, 1978.

[21] R. SENTIS, *Discrétisation élémentaire d'un problème de commande optimal,* Cahier de Mathématiques de la Décision n° 7712, Paris IX, 1977.

[22a] D. W. STROOCK AND S. R. S. VARADHAN, *Diffusion with continuous coefficients I and II.* Comm. Pure Appl. Math., 22 (1967) pp. 479–530.

[22b] ———, *Diffusion with boundary conditions,* Ibid., 24 (1971), pp. 142–225.

[23] M. VALADIER, *Multiapplications mesurables à valeurs convexes compactes,* J. Math. Pures et Appl., 50 (1971) pp. 265–297.

[24] L. C. YOUNG, *Lectures on the Calculus of Variations ad Optimal Control Theory,* Saunders, Philadelphia, 1969.