Compte Rendus à l'académie des Sciences n.311 p.745-748, 1990

THEOREMES ASYMPTOTIQUES EN PROGRAMMATION DYNAMIQUE

JEAN PIERRE QUADRAT

ABSTRACT. On montre l'analogie existant entre le calcul des probabilités et la programmation dynamique. Dans la première situation les convolutions itérées de lois de probabilité jouent un rôle central, dans la seconde les inf-convolutions de fonctions coûts ont un rôle similaire. L'outil d'analyse privilégié de la première situation est la transformée de Fourier, celui de la seconde devrait être la transformée de Fenchel. Aux lois gaussiennes — stables par convolution — correspondent les formes quadratiques — stables par inf-convolution. A la loi des grands des nombres et au théorème de la limite centrale correspondent des théorèmes asymptotiques pour la programmation dynamique — convergence de la fonction valeur de l'état moyenné vers la fonction caractéristique du minimum du coût instantané, convergence de la fonction valeur de l'écart au minimun renormalisé vers une forme quadratique.

ABSTRACT. **Asymptotic Theorems in Dynamic Programming**

We show the analogy between probability calculus and dynamic programming. In the first field iterated convolutions of probabilities laws play a central role, in the second one it is the inf-convolution of cost functions. The main analysis tool is : the Fourier transform for the first situation, the Fenchel transform for the second one. To gaussian laws — stable by convolution — correspond quadratic forms — stable by inf-convolution. To the law of large number and the central limit theorem correspond asymptotic theorems for the value function of the dynamic programming — convergence of the value function of the averaged state towards the characteristic function of the minimum of the instantaneous cost function, convergence of the normalized deviation from the minimum towards a quadratic form.

1. INF-CONVOLUTIONS DE FORMES QUADRATIQUES

Pour $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$, notons $Q_{m,\sigma}(x)$ la forme quadratique de la variable réelle x définie par :

$$Q_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2 \quad \text{pour } \sigma \neq 0,$$

$$Q_{m,0}(x) = \delta_m(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } x \neq m, \\ 0 & \text{pour } x = m. \end{cases}$$

Ces formes quadratiques s'annulent donc au point m.

Etant données deux fonctions f et g de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} \to \overline{\mathbb{R}}$ on appelle inf-convolution de f et g (Rockafellar [6]) l'application de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ — avec la convention $\infty - \infty = \infty$ — définie par :

$$z \to \inf_{x+y=z} [f(x) + g(y)]$$

que l'on note $f * g$.

PROPOSITION 1.1.

$$Q_{m,\sigma} * Q_{m',\sigma'} = Q_{m+m', \sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}}$$

Ce résultat doit être bien sûr rapproché de la formule correspondante en probabilité :

$$\mathcal{N}(m,\sigma) * \mathcal{N}(m',\sigma') = \mathcal{N}(m+m', \sqrt{\sigma^2+\sigma'^2})$$

où $\mathcal{N}(m,\sigma)$ désigne la loi gaussienne de moyenne m et l'écart type σ. Il existe donc un morphisme (l'exponentielle) entre les formes quadratiques munies de l'inf-convolution et des exponentielles de formes quadratiques munies de la convolution.

Ce résultat se généralise bien sûr au cas vectoriel.

2. PROGRAMMATION DYNAMIQUE

Etant donné le système commandé à temps discret le plus simple :

$$x_{n+1} = x_n - u_n, \quad x_0 \text{ donné},$$

pour $x_n \in \mathbb{R}$, $u_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, et un critère additif général :

$$\min_{u_0,u_1,\dots,u_{N-1}} \sum_{i=0}^{N-1} c(x_i,u_i) + \phi(x_N),$$

avec $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ convexe, s.c.i., positive, nulle en un point; et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, s.c.i., positive nulle en un point — les hypothèses ne sont pas minimales mais sont là pour rendre l'exposé plus clair.

La fonction valeur est définie par :

$$v_n(x) = \min_{u_n,\dots,u_{N-1}} \left\{ \sum_{p=n}^{N-1} c(x_p,u_p) + \phi(x_N) \right\}.$$

Elle satisfait l'équation de la programmation dynamique :

$$v_n(x) = \min_u \{c(x,u) + v_{n+1}(x-u)\}, \quad v_N(x) = \phi(x).$$

Ce qui se réécrit lorque c ne dépend pas de x

$$v_n = c * v_{n+1}, \quad v_N = \phi.$$

Soit en renversant le sens du temps, en faisant un changement d'origine $p = N - n$, et en prenant $\phi = \delta_0$:

$$v_p = c^{*p}$$

Et donc la solution de l'équation de la programmation dynamique — dans le cas le plus simple — est obtenue en itérant des inf-convolutions.

Donc l'analogie exposée au paragraphe précédent montre que le calcul de la fonction valeur de la programmation dynamique correspond au calcul de la loi de probabilité d'une somme de variables aléatoires indépendantes — dans le cas particulier c indépendant de x — ou de la loi d'une chaine de Markov dans le cas le plus général.

La question suivante devient alors naturelle : *"quels sont les analogues de la loi des grands nombres et du théorème de la limite centrale en programmation dynamique"*.

Avant de répondre à cette question rappelons la définition de la transformée de Fenchel et son analogie avec la transformée de Fourier (Bellman-Karush [2]).

3. Transformation de Fenchel

Soit f une application $\overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ convexe s.c.i.., propre c.a.d. différente de $+\infty$ etjamais égale à $-\infty$. On definit sa transformée de Fenchel $\mathcal{F}(f)$ comme l'application $\hat{f} : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que

$$\mathcal{F}(f)(p) = \hat{f}(p) = \sup_x [px - f(x)].$$

$\hat{f}$ est convexe s.c.i.. et propre.

Exemple 3.1. La formule:

$$\mathcal{F}(Q_{m,\sigma}) = \frac{1}{2}p^2\sigma^2 + pm$$

est l'analogue de la fonction charactéristique d'une loi de Gauss.

$\mathcal{F}$ est une involution, c.a.d. $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = f$ pour toute fonction f convexe propre s.c.i..

L'intérêt principal, ici, de la transformée de Fenchel est qu'elle transforme les inf-convolutions en somme :

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g).$$

Appliquant la transformée de Fenchel à l'équation de la programmation dynamique dans le cas où c ne depend pas de x on obtient :

$$v_N = \mathcal{F}(\hat{\phi} + N\hat{c}).$$

En utilisant la transformée de Fenchel rapide (Brenier [3]) cette formule donne un moyen rapide de résoudre l'équation de la programmation dynamique.

De plus rappelons que la transformée de Fenchel est continue pour l'épi-convergence, c.a.d. que les épigraphes de la transformée convergent si les épigraphes des fonctions sources convergent Joly [5], Attouch-Wets [1].

Exemple 3.2.

$$\mathcal{F}_e(\varepsilon x)(p) = \delta_\varepsilon(p).$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, $\delta_\varepsilon \to \delta_0$ au sens des épigraphes mais ne converge pas simplement bien que $\varepsilon x \to 0$ simplement.

On dispose maintenant des outils pour donner les analogues des théorèmes limites des probabilités.

4. Théorèmes limites en programmation dynamique

Supposons c et ϕ indépendantes de x, positives, convexes, s.c.i. et nulles en un point unique. Appelons m le point où s'annulle c . On appelle $w_N(x)$ la fonction $x \to v_N(Nx)$. Ce changement d'échelle correspond — sur la loi de probabilité — à la division par la taille de l'échantillon dans l'analogie probabiliste.

On a :

Théorème 4.1 (Loi faible des grands nombres en programmation dynamique). *Sous les hypothèses précédentes on a :*

$$\lim_{N\to\infty} v_N(Nx) = \delta_m(x)$$

la limite étant au sens de la convergence des épigraphes.

De la même manière on a l' analogue du théorème de la limite centrale qui nous indique que la fonction valeur de la programmation dynamique correctement normalisée et centrée est asymptotiquement quadratique. Plus précisément on a :

THÉORÈME 4.2 (de la limite centrale). *Sous les mêmes hypothèses qu'au paragraphe précédent et si c est deux fois continûment différentiable au voisinage de son minimum m, on a :*

$$\lim_{N\to\infty} v_N(\sqrt{N}(y+Nm)) = \frac{1}{2}c"(m)y^2.$$

La limite est au sens de la convergence des épigraphes.

Ces résultats s'étendent au cas vectoriel, au cas où les fonctions c dépendent du temps — index n dans le paragraphe 2 — etc...

Les méthodes de démonstration copient celles utilisées en probabilité. Elles font jouer le rôle de la transformée de Fourier par la transformée de Fenchel. Elles consistent donc à développer à l'ordre un — respectivement deux — les transformées des fonctions v_N et à faire un passage à la limite sur N au sens des de la topologie des épigraphes.

5. CONCLUSION

Concluons en résumant l'analogie entre le calcul des probabilité et la programmation dynamique par la table suivante.

Probabilité	Programmation dynamique
$+$	inf
$\times$	$+$
$\mathcal{N}_{m,\sigma}$	$Q_{m,\sigma}$
Fourier	Fenchel
convolution	inf-convolution
$\int dF(x) = 1$	$\inf_x c(x) = 0$
$\hat{F}'(0) = i\int x dF(x) = im$	$\hat{c}'(0) = m \ : \ c(m) = \inf_x c(x)$
$-\hat{F}''(0) = \int x^2 dF(x)$	$\hat{c}''(0) = \frac{1}{c''(m)}$

Bien que la transformée de Fenchel ait été beaucoup utilisée en probabilité pour étudier les écarts à la loi des grands nombres et que Bellman ait compris le rôle de la transformée de Fenchel pour la programmation dynamique, à notre connaissance la loi des grands nombres et le théorème de la limite centrale pour la programmation dynamique sont nouveaux.

REFERENCES

[1] H. ATTOUCH, R.J.B. WETS : *Isometries of the Legendre Fenchel transform,* Trans. of The Am. Math. Soc. n°296, p.33-60, (1986).

[2] R. BELLMAN, W. KARUSH : *Mathematical programming and the maximum transform* SIAM Ap. Math. vol.10 n°3, (1962).

[3] Y. BRENIER : *Un algorithme rapide pour le calcul de transformées de Legendre-Fenchel discrètes.* CRAS t.308, Série I,p. 587-589,(1989).

[4] W. FENCHEL : *On the conjugate convex functions,* Canad. J. Math. n°1 p.73-77, (1949).

[5] J.L. JOLY : *Une famille de topologie sur l'ensemble des fonctions convexes pour lesquelles la polarité est bicontinue,* J. Math. Pures et Ap. n° 52, p.421-441, (1973).

[6] R.T. ROCKAFELLAR : *Convex Analysis,* Princeton University Press, (1970).

INRIA DOMAINE DE VOLUCEAU ROCQUENCOURT 78153 LE CHESNAY CEDEX