EXISTENCE ET ALGORITHME DE RESOLUTION NUMERIQUE

DE PROBLEME DE COMMANDE DE DIFFUSION

STOCHASTIQUE AVEC SAUTS

Jean Pierre QUADRAT

Introduction

Nous nous intéressons ici au problème de commande de processus de diffusions avec sauts, dans le cas où le terme de diffusion peut s'annuler (problème dégénéré). L'intérêt d'une telle étude est de rassembler dans un formalisme unique la commande déterministe la commande des processus de diffusion, la commande des processus ponctuels et toutes les combinaisons possibles de ces problèmes. Le domaine d'application est vaste, pour en citer quelques uns: problème de gestion de stock de maintenance, de files d'attente de système de production, d'investissements etc..... En fait dès qu'on étudie un système ayant plusieurs variables d'état il est rare que toutes les équations soient "bruitées" et donc en général dans les problèmes pratiques on a àresoudre des problèmes dégénérés. Les perturbations pouvant être continues et ou discontinues un cadre raisonnable nous semble être la commande des diffusions avec sauts éventuellement dégénérées.

Ce domaine nous semble avoir été rarement abordé dans la littérature. Par contre la commande de diffusion avec sauts dans le cas non dégénéré a eté étudié dans Bismut [4] [5], Lepeltier Marchal [20], Bensoussan Lions [1]; Kushner [18] Les problèmes de commande de diffusion dans le cas dégénéré sont étudiés dans Fleming Rishel [14], Krilov , Sentis [25] [26], P.L. Lions Menaldi Quadrat [24] [25].

Les points de vue adoptes dans Bismut[4] et Lepeltier Marchal [22] ne semblent pas pouvoir s'étendre au cas dégénéré, car dans ces méthodes il est crucial d'avoir une mesure de référence fixe, ce qui est exclus dans le cas dégenéné. La méthode basée sur l'étude des équations de Hamilton Jacobi Bensoussan Lions [1] Fleming Rishel [14] Sentis [26], P.L.Lions Menaldi [34] bien que donnant des resultats plus précis lorsqu'elle s'applique ne semble pas pouvoir actuellement le degré de généralité (souvent nécéssaire en pratique) de la méthode probabiliste donnée ci dessous.

Nous étendons ici au cas des diffusions avec sauts le point de vue adopté dans Quadrat [24] [25] qui est basé sur les deux points suivants:

-la formulation faible des processus de diffusion avec sauts (problème de martingale) STrook [28], Lepeltier Marchal [22]

-les techniques utilisées en commande déterministe décrivant le système commandé en terme de multiapplication Young [33] , Castaing [10] , Valadier [32], Ekeland [13], Sentis [27] etc....

On est donc conduit à étudier le problème de martingale pour les multiapplications s.c.s. à valeur convexe. Cette multiapplication décrit en fonction de l'instant t et du point où l'on est l'ensemble admissible de commandes ici un convexe auquel doit appartenir le vecteur composé du terme de dérive de diffusion et la loi des sauts (mesure).

On donne dans la premiere partie un théorème d'existence d'une solution au problème de martingale pour des multiapplications convexes s.c.s grâce a une technique de discrétisation en temps du processus "Invariance principle"

On montre ensuite que l'ensemble des solutions d'un tel problème forme un ensemble convexe compact.L'existence d'une solution au problème de commande stochastique en découle immédiatement.

On caractérise ensuite les mesures optimales comme des limites de mesure construites en resolvant des problèmes de commande de chaine de Markov,en temps discret àétat continu dans une première étape ,puis àtemps et à état discrets.Ceci nous permet de formuler un programme convexe dont la solution donne une approximation de la mesure optimale.

Bien que les techniques diffèrent parfois ,le point de vue est proche de delui de Kushner [19] ,la différence essentielle étant ici l'utilisation de l'opproche problème de martingale pour les multiapplications s. c.s. Cet auteur approxime en effet le problème initial par un problème de commande de chaine de Markov et donne des resultats de convergence du type :on obtient un feedback meilleur que tout feedback lipschitzien.Dans Quadrat [25] il est donné un contre exemple montrant que ce type de résultat bien que trés intéressant en pratique est insuffisant.dans le cas dégénéré.

Nous renvoyons pour l'étude des processus de diffusion avec sauts à Skorohod [29], Gihman Skorohod [ ], Strook [28], Lepeltier Marchal [22], Jacod Mémin [16], Jacod Yor [17] et Brémaud [8] pour les processus ponctuels.

Citons enfin une application à un problème de gestion de moyens de production de la Nouvelle Calédonie Colleter Delebecque Falgarone Quadrat [11]

Nous suivrons le plan suivant:

1)Le problème de martingale définition et théorème constructif d'existence

1.1)Définition du problème de martingale

1.2)Une famille de probabilité de transition

1.3)Une famille de probabilité sur Ω

1.4)Théorème d'existence du problème de martingale

1.5)Existence d'une solution faible de l'equation de Fokker Planck

2)Quelques propriétés des solutions du problème de martingale

3)Commande optimal du problème demartingale

3.1)Position du problème

3.2)Commande de processus arrêté

3.3)Caractérisation de la solution optimale , discrétisation en temps

3.4)Caractérisation de la solution optimale discrétisation en temps et en espace

3.5)Sur la résolution numérique du problème

1) Le problème de martingale définition et théorème constructif d'existence

1.1) Définition du problème de martingale

Soient

E_1 un compact de R^m, $M_1 = \sup_{b \in E_1} |b|$;

$U = R^m$

E_2 un compact du cone convexe des matrices symétriques non négatives (ensemble convexe fermé de $R^{m \times \frac{(m+1)}{2}}$), $M_2 = \sup_{a \in E_2} |a|$

$E_3 = \mathcal{M}_+^b(R^m)$ le cone des mesures positives bornées sur R^m de borne M muni de la topologie de la convergence étroite des mesures, verifiant $\int |u|^2 \nu(du) \leq M_3$ (cette dernière condition entraine que E_3 est un compact de mesure);

$\Omega = D([0,T]; R^m)$ l'espace des fonctions c.a.d.l.a.g (continues àdroite limitues àgauche) muni de la topologie de Skorohod modifié en faisant un espace complet (cf.Billingsley [3] ch.3);

$X_t(\omega) = \omega_t$ le processus canonique sur Ω;

$F_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ la plus petite tribu rendant les applications coordonnées jusqu'à l'instant t mesurables;

$F_T = F$ la tribu des boréliens sur Ω ;

$\mathcal{P}$ la tribu des prévisibles sur $\Omega \times [0,T]$;

$\Phi = C_b^{1,2}([0,T] \times R^m; R)$ l'espace des fonctions à dérivées une fois en t deux fois en $x \in R^m$, continues bornées;

la multiapplication:

$$C : [0,T] \times R^m \dashrightarrow E = E_1 \times E_2 \times E_3 \quad \text{s.c.s à valeur convexe compact}$$

Pour $\varphi \in \Phi$

$c:([0,T]\times\Omega,\mathcal{P}) \dashrightarrow E$ processus prévisible à valeur dans C
$\quad s,\ \omega \qquad (b(s,\omega),a(s,\omega),\nu(s,\omega;du))$

(c.a.d $c(s,\omega) \in C(s,X_{s^-}(\omega))$);

on définit l' application

$$L_c:\ \Phi\times[0,T]\times\Omega \dashrightarrow R$$
$$\varphi,s\ ,\omega \qquad L_c^{\varphi}(s,\omega)$$

avec

$$L_c\varphi(s,\omega)=D_t\varphi(s,X_s(\omega))+\sum_{i=1}^{m} b_i(s,\omega)D_{x_i}\varphi(s,X_s(\omega))+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(s,\omega)$$
$$D^2_{x_i x_j}\varphi(s,X_s(\omega)) +\int_U [\varphi(s,X_s(\omega)+u)-\varphi(s,X_s(\omega))]\nu(s,\omega;du)$$

On notera également:

$$L_c\varphi(s)=L_c\varphi(s,\omega)$$

1.1)Définition

Une mesure de probabilité P sur $(\Omega;F_t,F)$ sera appelée solution du problème de martingale pour le doublet (x,C) s'il existe $c(s,\omega)$ prévisible vérifiant

i) $c(s,\omega)\in C(s,X_{s^-}(\omega))$

ii) $\varphi(t,X_t(\omega))-\varphi(o,x)-\int_0^t L_c\varphi(s)ds$ est une (P,F_t) martingale partant de o.

On désigne par $\mathcal{P}(K,C)$ l'ensemble des mesures de probabilités sur Ω, solution du problème de martingale (x,C) $x\in K$, K compact de R^m.

Nous allons maintenant construire une solution au problème de martingale. Pour cela nous définissons une suite de mesure convergeant étroitement vers une solution du problème de martingale. Cette suite de mesure est construiute grâce à une discrétisation en temps du problème de martingale.

1.2) Une famille de probabilité de transition

On se donne $n \in N$, on note $h=T/n$.

Notons $\Pi^{n,C,\rho,\alpha,\beta}$ la multiapplication de $[0,T]\times R^m$ ------ $\mathcal{M}_+^1(R^m)$

$\Pi^{n,C,\rho,\alpha,\beta} = \{ \mathcal{M}_+^1(R^m) : \pi = \pi_1 + \pi_2 \quad \pi_1 \geq 0 \ , \ \pi_2 \geq 0$

(1.1) $\left(\int (y-x)\pi_1(dy), \int (y-x)^{\otimes 2}\pi_1(dy), \pi_2^x(du) \right) \in C(s,x)h$

(1.2) $\int |y-x|^\beta \pi_1(dy) \leq \rho h^\alpha$; avec π_2^x l'image de π_2 par la translation de $-x$

Afin de simplifier les notations nous écrirons lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité $\Pi^{n,C}$ pour $\Pi^{n,C,\rho,\alpha,\beta}$

Lemme 1

$\Pi^{n,C} : [0,T]\times R^m$ -------> $\mathcal{M}_+^1(R^m)$ est à valeur relativement compactes

démonstration

Grâce au critère de Prokorov il suffit de montrer que

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists d \ : \ \pi(y: |y-x| \geq d) \leq \varepsilon \ \ \forall \pi \in \Pi^{n,C}(s,x)$

or

$\pi(y: |y-x| \geq d) = \pi_1(y: |y-x| \geq d) + \pi_2(y: |y-x| \geq d)$

L'inégalité de Tchebycheff et la définition de M, M_2 et M_3 (I.1) donne:

$$\pi_1(y : |y-x| \geq d) \leq \frac{M_2}{d^2}$$

$$\pi_2(y: |y-x| \geq d) = \pi_2^x(u: |u| \geq d) \leq \frac{1}{d^2} \int |u|^2 \pi_2^x(du) \leq \frac{M_3}{d^2}$$

d'où le résultat.

lemme 1.2

Soient: - $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues sur R^m munie de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact; - une suite $\{f_n\}$ convergeant vers f; une suite $\{\pi_n \in \mathcal{M}_+^b\}$ convergeant étroitement vers π vérifiant

$$\int |f_n|^p \pi_n \leqslant d < +\infty \quad ;$$

alors

$$\int |f|^p \pi \leqslant d \quad ,$$

et la suite $\{\int f_n \pi_n\}$ converge vers $\int f \pi$.

démonstration

a) Montrons $\int |f|^p \pi \leqslant d$

$$\int \sup_k (|f|^p \wedge k) = \sup_k \int (|f|^p \wedge k) = \sup_k \lim_n \int (|f|^p \wedge k) \pi_n$$

$$= \sup_k \lim_n \left\{ \int (|f_n|^p \wedge k) \pi_n + \int (|f_n|^p \wedge k - |f|^p \wedge k) \pi^n \right\}$$

On aura donc le résultat dès que l'on aura montré que

$$\lim_n \int | \, |f_n|^p \wedge k - |f|^p \wedge k \, | \pi^n = 0$$

Or $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ un compact de R^m, $K(\varepsilon)$: $\pi_n(C_K) \leqslant \varepsilon \ \forall n$

$$\int (|f_n|^p \wedge k - |f|^p \wedge k) \pi_n \leqslant \sup_{x \in K} |f_n - f| 2pk^{\frac{p-1}{p}} + k\varepsilon$$ d'où le résultat en faisant tendre ε vers 0.

b) montrons $\lim \int f_n \pi_n = \int f \pi$

$$\int f_n \pi_n - \int f \pi = \int (f_n - f_n^k) \pi^n + \int (f_n^k - f^k) \pi^n + \int f^k (\pi^n - \pi) + \int (f - f^k) \pi$$

avec $f^k = (-k) \vee (f \wedge k)$

$f_n^k = (-k) \vee (f_n \wedge k)$

$$\left| \int (f_n - f_n^k) \pi^n \right| \leqslant \int_{f_n \geqslant k} 2 |f_n| \pi_n \leqslant \frac{2}{k^{p-1}} \int |f_n|^p \pi_n \leqslant \frac{2d}{k^{p-1}}$$

Le même raisonnement montre que

$$\left|\int (f-f^k)\pi\right| \leqslant \frac{2d}{k^{p-1}}$$

D'autre part

$$\lim_n \int f^k(\pi^n - \pi) = 0$$

$\{\pi_n\}$ étant étroitement relativementcompact

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K(\varepsilon)$ compact de R^m $\pi^n(C_K) \leqslant \varepsilon$

$$\left|\int (f_n^k - f^k)\pi^n\right| \leqslant \int_K |f_n^k - f^k|\pi^n + \int_{C_K} |f_n^k - f^k|\pi^n$$

$$\leqslant \sup_{x \in K} |f_n - f|(x) + k\varepsilon$$

On en déduit

$$\forall k, \forall \varepsilon_1 > 0 \quad N(\varepsilon_1, k) \ \forall n \geqslant N \quad \left|\int f^n\pi^n - \int f\pi\right| \leqslant \frac{4d}{k^{p-1}} + \varepsilon_1$$

d'où le résultat.

Lemme 1.3

Soit $\tilde{\pi}^m$ une suite de mesure sur R^m convergeant étroitement vers $\tilde{\pi}$, x_n une suite convergeant vers x appartenant a R^m, T_x la translation de x alors:

$T_{x_n}\tilde{\pi}_n$ converge étroitement vers π et on a $T_x\tilde{\pi} = \pi$

démonstration

L'utilisation du critère le Prokorov montre l'étroite relative compacité de $T_{x_n}\tilde{\pi}_n$, il reste à identifier la limite.

Soit φ une fonction continue bornée on a

$$\int \varphi(y) \, T_{x_n}\tilde{\pi}_n(dy) = \int \varphi(y - x_n)\tilde{\pi}_n(dy)$$

L'utilisation du lemme 1.2 montre que

$\lim_n \int \varphi(y-x_n)\tilde{\pi}_n(dy) = \int \varphi(y-x)\tilde{\pi}(dy)$ $\forall \varphi$ continue bornée donc

$\int \varphi(y)\pi(dy) = \int \varphi(y-x)\tilde{\pi}(dy)$ donc $\pi = T_x\tilde{\pi}$ C.q.f.d.

Proposition 1.1

La multiapplication $\Pi^{n,C,\rho,\alpha,\beta}$ définie en 1.2.1 est s.C.s des que $\beta>2$

démonstration

Montrons qu'elle est de graphe fermé et donc grâce au lemme 1.1 à valeur compacte et de graphe fermé et donc s.c.s

Soit (s_k,x_k,π_k) une suite de $[o,T]\times R^m\times\mathcal{M}^1_+(R^m)$ telle que $\pi_k\in\Pi^{n,C}(s_k,x_k)$, convergeant vers (s,x,π), montrons que $\pi\in\Pi^{n,C}(s,x)$

Puisque $\pi_k\in\Pi^{n,C}(s_k,x_k)$ $\exists\ \pi^1_k$ et π^2_k: $\pi_k=\pi^1_k+\pi^2_k$

$\left(\int(y-x_k)\pi^1_k,\ \int(y-x_k)^{\otimes 2}\pi^1_k,\ \pi^{2,\chi}_k\right)\in C(s_k,x_k)h$

$\int|y-x_k|^\beta\pi^1_k(dy)\leqslant\rho h^\alpha$

Puisque $\pi_k \dashrightarrow \pi$ la suite $\{\pi_k\}$ est étroitement relativement compacte et donc les suites $\{\pi^1_k\}$ et $\{\pi^2_k\}$ le sont également, et donc il existe deux sous suites $\{\pi^1_{k'}\}$ et $\{\pi^2_{k'}\}$ telles que :

$$\pi^1_{k'} \xrightarrow[k'\to\infty]{} \pi^1$$

$$\pi^2_{k'} \xrightarrow[k'\to\infty]{} \pi^2 \Rightarrow \pi^{2,\chi}_{k'} \dashrightarrow \pi^{2,\chi}$$ grâce au lemme 1.3.

D'autre part grâce au lemme 1.2

$$\int(y-x_{k'})\pi^1_{k'} \dashrightarrow \int(y-x)\pi^1$$

$$\int(y-x_{k'})^{\otimes 2}\pi^1_{k'} \dashrightarrow \int(y-x)^{\otimes 2}\pi^1$$

(1.3) $\int|y-x|^\beta\pi^1\leqslant\rho h^\alpha$ des que $\beta>2$

La multiapplication C étant s.c.s

(1.4) $\left(\int(y-x)\pi^1,\int(y-x)^{\otimes 2}\pi^1,\ \pi^{2,\chi}\right)\in C(s,x)\ h$

D'autre part π^1_k (resp. $\pi^{2,\chi}_k$) étant positives $\pi^1\geqslant o$ (resp. $\pi^{2,\chi}\geqslant o$)

enfin

$$\int \pi_k^1 + \pi_k^2 = 1 \Rightarrow \int \pi^1 + \pi^2 = 1$$

et donc

$\pi = \pi^1 + \pi^2$ appartient à $\Pi^{n,C}(s,x)$ c.q.f.d.

1.3 Une famille de probabilité sur Ω

A partir de la famille de probabilité de transition définie au paragraphe 1.2 nous construisons une famille de probabilité dont on montrera dans les paragraphes suivant qu'elle converge vers une solution du problème de martingale.

Etant donné une section borélienne de $\Pi^{n,C}$ notée $\pi_{s,x}$ qui existe dès que $\Pi^{n,C}$ ne prend jamais la valeur vide grâce à la section 81 ch.3 [12] ,construisons la mesure notée $\bar{P}^n_{\pi,y}$ définie sur $(R^{m\times n}, \mathcal{B})$ par:

$$\bar{P}^n_{\pi,y}(dy_0\ dy_1 \ldots dy_{n-1}) = \delta_y(dy_0)\pi_{h,y_0}(dy_1)\ldots\ldots\pi_{(n-2)h,y_{n-2}}(dy_{n-1})$$

Considérons maintenant la variable aléatoire

$$(R^{m\times n}, \mathcal{B}) \xrightarrow{I} (\Omega, F)$$

$$I(y_0, y_1, \ldots y_{n-1})(t) = \begin{cases} y_i & \text{pour } t \in [ih,(i+1)h[\quad i=0,\ldots\ldots,n-1 \\ y_{n-1} & \text{pour } t=T \end{cases}$$

On désignera par $P^n_{\pi,y}$ la mesure image de $\bar{P}^n_{\pi,y}$ par I.

Notons alors

$$\mathcal{P}(n,K,C,\rho,\alpha,\beta) = \{P^n_{\pi,y} : \pi \text{ section borelienne de } \Pi^{n,C,\rho,\alpha,\beta},\ y \in K\}$$

On ecrira souvent

$\mathcal{P}(n,K,C)$ pour $\mathcal{P}(n,K,C,\rho,\alpha,\beta)$

De même on notera:

$$\mathcal{P}(\mathbb{N},K,C) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(n,K,C)$$

Proposition 1.2

$\mathcal{P}(\mathbb{N},K,C)$ est étroitement relativement compact

démonstration

On utilise le critère de relative étroite compacité th 15.3 P.Billingsley [3]

$\mathcal{P}(\mathbb{N},K,C)$ est étroitement relativement compacte si

(1.5) $\forall \eta>0 \ \exists \alpha \quad P\{\omega : \sup_t |X_t| \geqslant \alpha\} \leqslant \eta \qquad \forall P \in \mathcal{P}(\mathbb{N},K,C)$

$\forall \varepsilon, \eta > 0 \ \exists \delta \quad 0<\delta<T$

(1.6) $P\{\omega : \sup_{s,t \leqslant \delta} |X_t - X_s| \geqslant \eta\} \leqslant \varepsilon \qquad \forall P \in \mathcal{P}(\mathbb{N},K,C)$

(1.7) $P\{\omega : \sup_{T-\delta \leqslant s \leqslant t \leqslant T} |X_t - X_s| \geqslant \eta\} \leqslant \varepsilon \qquad \forall P \in \mathcal{P}(\mathbb{N},K,C)$

(1.8) $P\{\omega : \sup_{\substack{0 \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \leqslant T \\ t_2 - t_1 \leqslant \delta}} \min (|X_t - X_{t_1}| , |X_{t_2} - X_t|) \geqslant \eta\} \leqslant \varepsilon \quad \forall P \in \mathcal{P}(\mathbb{N},K,C)$

Remarquons que

$Y_{ih} = X_{ih} - x - \sum_{j=0}^{i-1} \int (y - X_{jh}) \, \pi_{jh, X_{jh}}(dy)$ est une $(\bar{P}^n_{\pi,x}; F_{ih})$ martingale

démonstration de 1.5

$$E\{ \sup_{t \leqslant T} |X_t|^2 \} \leqslant k_1 \Big\{ E \sup_{\substack{i \\ ih \leqslant T}} |Y_{ih}|^2 + E \sup_i \Big| \sum_{j=0}^{i-1} \int (y - X_{jh}) \pi_{jh,X_{jh}}(dy) \Big|^2 + |x|^2 \Big\}$$

or

$$E \sup_i \Big| \sum_{j=0}^{i-1} \int (y - X_{jh}) \pi_{jh,X_{jh}}(dy) \Big|^2 \leqslant k_2 n^2 \, E(\sup_{\substack{j \\ jh \leqslant T}} \Big| \int (y - X_{jh}) \pi_{jh,X_{jh}}(dy) \Big|^2$$

$$\leqslant k_3 n^2 (E \sup_j \Big| \int (y - X_{jh}) \pi^1_{jh,X_{jh}}(dy) \Big|^2 + E \sup_j \Big| \int (y - X_{jh}) \pi^2_{jh,X_{jh}}(dy) \Big|^2$$

$$\leqslant k_4 n^2 ((M_2 h)^2 + (M_3 h)^2) \leqslant k_5 T^2$$

D'autre part Y_{ih} étant une martingale on a:

$E \sup_{\substack{i \\ ih \leqslant T}} |Y_{ih}|^2 \leqslant k_5 \, E|A_T|$ où A_T désigne le processus croissant de Y_{ih}

or $\quad |A_T| \leqslant k_6\ E \sum_{j=0}^{i-1} \int |y-X_{jh}|^2 \pi_{jh;X_{jh}}(dy) \leqslant k_7 T$

et donc grâce àl'inégalité de Tchebycheff (1.5) en découle

démonstration de 1.6:

Il suffit de montrer que

$$\sup_{P\in\mathcal{P}(\mathbb{N},K,C)} E \sup_{ih\leqslant\delta} |X_{ih}-x|^2 \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$$

Or grâce a un raisonnement analogue a celui de la démonstration précédente on montre que

$$\sup_{P\in\mathcal{P}} E \sup_{ih\leqslant\delta} |X_{ih}-x|^2 \leqslant k_8\delta$$

d'où le résultat

Laadémonstration de 1.7 est analogue à celle de 1.6

Démonstration de 1.8

Il suffit de démontrer d'aprés la démonstration du th.15.6 de P.Billingsley [3] $\exists k_9$:

$$\varphi(t_1,t,t_2)=E\{|X(t_2)-X(t)|^2\,|X(t)-X(t_1)|^2\}\leqslant k_9(t_2-t_1)^2 \qquad P\in\mathcal{P}(\mathbb{N},K,C)$$

Or considérons

$$E\,|X_{t_2}-X_t|^2|X_t-X_{t_1}|^2=E\{E(|X_{[\frac{t_2}{h}]h}-X_{[\frac{t}{h}]h}|^2 F_{[\frac{t}{h}]h})\,|X_{[\frac{t}{h}]h}-X_{[\frac{t_1}{h}]h}|^2\}$$

où $[\alpha]$ désigne la partie entière de $\alpha\in\mathbb{R}$

$E(|X_{[\frac{t_2}{h}]h}-X_{[\frac{t}{h}]h}|^2 F_{[\frac{t}{h}]h})\leqslant k_{10}([\frac{t_2}{h}]h-[\frac{t}{h}]h)$ par une démonstration analogue à celle de (1.5)

De même

$$E\left|X_{\left[\frac{t}{h}\right]h}-X_{\left[\frac{t_1}{h}\right]h}\right|^2 \leqslant k_{11}\left(\left[\frac{t}{h}\right]h-\left[\frac{t_1}{h}\right]h\right)$$

D'autre part:

$$\left[\frac{t_2}{h}\right]h-\left[\frac{t}{h}\right]h \geqslant t_2-t_1 \Rightarrow -\left[\frac{t}{h}\right]h \geqslant -t_1 \Rightarrow \left[\frac{t_1}{h}\right]=\left[\frac{t}{h}\right]$$

de même

$$\left[\frac{t}{h}\right]h-\left[\frac{t_1}{h}\right]h > t_2-t_1 \Rightarrow \left[\frac{t}{h}\right]h > t_2-h \Rightarrow \left[\frac{t}{h}\right] > \left[\frac{t_2}{h}\right]-1 \Rightarrow \left[\frac{t}{h}\right] \geqslant \left[\frac{t_2}{h}\right]$$

et donc

$$E\left|X_{t_2}-X_t\right|^2\left|X_t-X_{t_1}\right|^2 \leqslant k_{12}\left(\left[\frac{t_2}{h}\right]h-\left[\frac{t}{h}\right]h\right)\left(\left[\frac{t}{h}\right]h-\left[\frac{t_1}{h}\right]h\right) \leqslant k_{12}(t_2-t_1)^2$$

d'où 1.8 ∎

<u>Lemme 1.4</u> (D.W.Strook S.R.S.Varadhan [30], [31] dans le cas des diffusions)

<u>Soit $\varphi \in \Phi$,notons</u>

$$\underline{\Delta_\varphi^h(t,x,y) = \varphi(t+h,y)-\varphi(t,x)-hD_t\varphi(t,x)-(y-x)D_x\varphi(t,x)-{}^t(y-x)D_x^2\varphi(y-x)}$$

$$\Delta^h_{\varphi,\pi_1}(t,x) = \int \Delta^h_\varphi(t,x,y)\pi^1_{t,x}(dy)$$

$$\bar\Delta^h_\varphi(t,x,u) = \varphi(t+h,x+u)-\varphi(t,x)-hD_t(t,x)-(\varphi(t,x+u)-\varphi(t,x))$$

$$\bar\Delta^h_{\varphi,\pi_2}(t,x) = \int_U \bar\Delta^h_\varphi(t,x,u)\pi^{2,x}_{t,x}(du)$$

<u>alors si π^1 et π^2 désignent la décomposition de π dans la définition de $\Pi^{n,C}$</u> on a des <u>que</u> $\beta>2$ $\alpha>1$:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{P\in\mathcal{P}(n,K,C)} E\left\{\sum^{i}\left|\Delta^h_{\varphi,\pi_1}(t,X_{ih})\right|+\left|\bar\Delta^h_{\varphi,\pi_2}(t,X_{ih})\right|\right\}=0$$

demonstration

$\varphi \in \phi, \exists k_1$

$|\Delta^h_\varphi(t,x,y)| \leqslant k_1(|x-y|^2+h)$

et donc grâce à la définition de C

(1.9) $|\Delta^h_{\varphi,\pi_1}(t,x)| \leqslant k_2 h$

Grâce au théorème de Taylor

$\Delta^h_\varphi(t,x,y) = o(h)+o(|x-y|^2)$ uniformément pour $|x| \leqslant M$

et donc

$$\forall \varepsilon > o \ \exists \delta(\varepsilon) > o : |x-y| < \delta \quad |h| < \delta \quad \sup_{|x| \leqslant M} |\Delta^h_\varphi(t,x,y)| \leqslant \varepsilon h + \varepsilon |x-y|^2$$

$$\sup_{|x| \leqslant M} |\Delta^h_{\varphi,\pi_1}(t,x)| \leqslant \int_{|y-x| \leqslant \delta} \sup_{|x| \leqslant M} |\Delta^h_\varphi(t,x,y)| \, \pi^1_{t,x}(dy)$$

$$+ \int_{|y-x| \geqslant \delta} \sup_{|x| \leqslant M} |\Delta^h_\varphi(t,x,y)| \, \pi^1_{t,x}(dy)$$

$$\leqslant k_3 \varepsilon h + \frac{1}{\delta^{\beta-2}} \int_{|y-x| \geqslant \delta} |y-x|^\beta \pi^1_{t,x}(dy)$$

(1.10) $$\leqslant k_3 \varepsilon h + \rho \frac{h^\alpha}{\delta(\varepsilon)^{\beta-2}} = o(h)$$

D'autre part comme $\mathcal{P}(\mathbb{N},K,C)$ est étroitément relativement compacte

(1.11) $\forall \varepsilon > o \ \exists k_4 \ \sup_{P \in \mathcal{P}} P\{\sup_{o \leqslant t \leqslant T} |X(t)| \geqslant k_4\} \leqslant \varepsilon$

(1.9)(1.10)(1.11) $\Rightarrow$

(1.12) $\lim_{n \to \infty} \sup_{P \in \mathcal{P}(n,K,C)} E \sum_i |\Delta^h_{\varphi,\pi_1}(t,X_{ih})| = o$. D'autre part

$|D_t \varphi(t,x)| \leqslant k_5$

$\sup_y |\varphi(t+h,y) - \varphi(t,y)| \leqslant k_6 h$

$\sup_u |\bar{\Delta}^h_\varphi(t,x,u)| \leqslant k_7 h$

Comme $\pi^x_2 = h\nu \quad \nu \in \mathcal{M}^b_+(\mathbb{R}^m)$

$$|\bar{\Delta}^h_{\varphi,\pi_2}(t,x)| \leqslant k_8 h^2$$

et donc

(1.13) $$\lim_{n\to\infty} \sup_{P\in\mathcal{P}(n,K,C)} E\{\Sigma|\bar{\Delta}^h_{\varphi,\pi_2}|\} = 0$$

(1.12) et (1.13) donne alors le résultat.

Proposition 1.3

Soient sur un espace polonais Ω :

-une suite de mesure positive bornée de masse $\leqslant p$, $\{Q_n\}$ convergeant étroitement vers Q;

-une suite $\{C^n\}$ de multiapplication s.c.s de $\Omega \dashrightarrow (\mathcal{M}_+^p(R^m))^q$ à valeur dans un compact fixe, convergeant en décroissant, ponctuellement vers C s.c.s ($\bigcap_n C^n(\omega) = C(\omega)$) à valeur convexe;

-une suite $\{\nu^n\}$ de mesure de transition de $\Omega \dashrightarrow (\mathcal{M}_+^{p'}(R^m))^q$

$\nu_n(\omega) \in C(\omega)$

alors

-la suite $\{\nu_n Q_n \in (\mathcal{M}_+^{p\times p'}(\Omega\times R^m))^q$ est étroitement relativement compacte;

-il existe une sous suite extraite $\{\nu_{n'} Q_{n'}\}$ convergeant étroitement vers une mesure bornée notée R

-R peut se désintégrer sous la forme νQ avec

$$\nu : \Omega \dashrightarrow (\mathcal{M}_+^p(R^m))^q, \quad \nu(\omega) \in C(\omega) \quad Q \ \ p.p$$

Pour démontrer cette proposition commencons par donner quelques lemmes

Lemme 1.5

La suite $\{\nu_n Q_n\}$ définie par la proposition 1.3 est étroitement relativement compacte.

démonstration

C_n étant à valeur dans un compact de $(\mathcal{M}_+^p(R^m))^q$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_0$ compact de R^m $\nu_n(C_{K_0}) \leq \varepsilon \quad \forall n, \nu_n \in C_n$

(c.n.s d'étroite relative compacité dans un espace polonais th.6.2[3])

$\{Q_n\}$ étant étroitement relativement compact

$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists K_1$ compact de Ω $Q_n(C_{K_1}) \leq \varepsilon_1$

et donc

$\forall \varepsilon_2 > 0 \ \exists K_2$ compact de $\Omega \times R^m$ $\nu_n Q_n \ (C_{K_2}) \leq \varepsilon_2$

il suffit de prendre

$K_2 = K_0 \times K_1$

d'où le résultat.

Lemme 1.6

De la suite $\{\nu_n Q_n\}$ définie dans la proposition 1.3, on peut extraire une sous suite $\{\nu_{n'} Q_{n'}\}$ convergeant étroitement vers une mesure R qui peut se désintegrer sous la forme νQ où $Q = \lim Q_n$.

démonstration

Le lemme 1.5 montre qu'il existe une sous suite $\{\nu_{n'} Q_{n'}\}$ conv. vers une mesure $R = \tilde{Q}(d\omega)\tilde{\nu}^\omega(du)$.

R_i $i=1\ldots q$ peut se desintégrer sous la forme $Q_i(d\omega)\nu_i^\omega(du)$ avec $\int_{R^m} \nu_i^\omega(du) = 1$.

Il suffit de montrer que les Q_i sont absolument continus par rapport à $Q=\lim_n Q_n$

Soit $\varphi(\omega)$ continue bornée on a, puisque $\nu^{\omega}_{n,i}(du)\in\mathcal{M}^p_+(R^m)$

$$-p\int_\Omega \varphi(\omega)Q_n(d\omega)\leqslant\int_{\Omega\times R^m}\varphi(\omega)\nu^{\omega}_{n,i}(du)Q_n(d\omega)\leqslant p\int_\Omega \varphi(\omega)Q_n(d\omega)$$

et donc en passant à la limite

$$-p\int\varphi(\omega)Q(d\omega)\leqslant\int\varphi(\omega)R_i(d\omega\times du)=\int\varphi(\omega)\widetilde{Q}_i(d\omega)\leqslant p\int\varphi(\omega)Q(d\omega)$$

et donc

$$-pQ(d\omega)\leqslant \widetilde{Q}_i(d\omega)\leqslant pQ(d\omega)$$

et donc

$$\widetilde{Q}_i\ll Q$$

Soit

$$g_i(\omega)=\frac{d\widetilde{Q}_i(\omega)}{dQ}\qquad |g_i(\omega)|\leqslant p$$

En prenant $\nu^{\omega}_i(du)=g_i(\omega)\widetilde{\nu}^{\omega}_i(du)$ on obtient le résultat.

Lemme 1.7

Soit sur Ω un espace polonais une famille de mesure bornée positive de masse fixe, convergeant étroitement vers Q et une famille Ψ_n de variable aléatoire s.c.s bornée décroissante convergeant ponctuellement vers Ψ alors :

$$\limsup\int\Psi_n dQ_n\leqslant\int\Psi dQ$$

démonstration

$\int\Psi_n dQ_n\leqslant\int\Psi_N dQ_n$ si $n\geqslant N$ grâce à la décroissance de Ψ_n.

Ψ_N étant s.c.s le th. 5.5 Delacherie-Meyer [12] entraine

$$\limsup_n \int \Psi_N dQ_n \leqslant \int \Psi_N dQ$$

et donc

$$\limsup_n \int \Psi_n dQ_n \leqslant \limsup \int \Psi_N dQ_n \leqslant \int \Psi_N dQ \quad \forall N$$

Ψ_N étant décroissante en N et convergeant vers Ψ on a

$$\lim_N \int \Psi_N dQ = \int \lim_N \Psi_N dQ = \int \Psi dQ$$

d'où le résultat .

Lemme 1.8

L'ensemble $CQ = \{ \nu^{\omega}(du)Q(d\omega) \in (\mathcal{M}_+^{p\times p'}(\Omega\times R^m))^q \quad \nu \in C \quad Q \text{ p.s} \}$ où C est une multiapplication de $\Omega \dashrightarrow (\mathcal{M}_+^{p\times p'}(R^m))^q$ est convexe fermé des que C est s.c.s à valeur convexe.

Démonstration

Soit $\{\nu_n Q\}$ une suite de mesure $\in CQ$ convergeant dans $\mathcal{M}^b(\Omega\times R^m)$ vers R qui peut s'écrire grâce au lemme 1.6 νQ ,montrons que $\nu \in C$.

Soit $\varphi \in (C^b(R^m))^q$,notons $\Gamma(\omega,\varphi) = \sup_{\nu \in C(\omega)} (\nu(du),\varphi)$

On a

$(\nu_\omega^n(du),\varphi) \leqslant \sup_{\nu \in C(\omega)}(\nu,\varphi)$ car $\nu^n \in C$ Qp.p.

On a donc si g $C^b(\Omega) \geqslant 0$

$$\int_\Omega g(\nu_\omega^n,\varphi)Q(d\omega) \leqslant \int_\Omega g\Gamma(\omega,\varphi)Q(d\omega)$$

Or en utilisant la convergence étroite de $\nu^n Q \dashrightarrow \nu Q$

on en déduit:

$$\int_{\Omega} g(\nu,\varphi)Q \leq \int_{\Omega} g\Gamma(\omega,\varphi)Q(d\omega) \quad \forall g\in C^b(\Omega) \quad g\geq 0$$

$$\Rightarrow (\nu_\omega,\varphi)\leq\Gamma(\omega,\varphi) \quad Q \text{ p.s.}$$

Mais le négligeable peut dépendre de φ ,pour montrer qu'il n'en est pas ainsi prenons φ_k une famille dénombrable dense dans $C^b_K(R^m)$(fonctions continues bornées munies de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact)

En dehors du négligeable N dépendant de la famille dénombrable dense on a:

$$(\nu_\omega, \varphi_k)\leq\Gamma(\omega,\varphi_k) \quad \forall\omega\notin N$$

$$(\nu_\omega,\varphi)-\Gamma(\omega,\varphi)=(\nu_\omega,\varphi_k)-\Gamma(\omega,\varphi_k)+(\nu_\omega,\varphi-\varphi_k)-(\Gamma(\omega,\varphi)-\Gamma(\omega,\varphi_k))$$

D'autre part

$(\nu_\omega,\varphi-\varphi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ car $\varphi_k \to \varphi$ uniformément sur tout compact

$\Gamma(\omega,\varphi)-\Gamma(\omega,\varphi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ en utilisant la majoration

$$\left|\sup_{\nu\in C(\omega)}(\nu,\varphi)-\sup_{\nu\in C(\omega)}(\nu,\varphi_k)\right|\leq \text{cte}\left(\sup_{x\in K}|\varphi_k-\varphi|(x)+\sup_{\nu\in C(\omega)}(C_K)\right) \quad K \text{ compact de } \Omega,$$

et donc $\forall\omega\notin N$

$$(\nu_\omega,\varphi)\leq\Gamma(\omega,\varphi) \quad \Rightarrow \nu_\omega\in C(\omega) \quad Q \text{ p.s. c.q.f.d.}$$

démonstration de la proposition 1.3

Les points 1et 2 de la conclusion résultent des lemmes 1.5 et 1.6

il reste à montrer la partie 3, $\nu^{\omega} \in C(\omega)$ Q p.p

Soit $\nu_n \in C_n$ $\varphi \in (\mathcal{C}^b(\Omega \times R^m))^q$

on a:

$$\underset{\nu \in C_n(\omega)}{\mathrm{Max}} \langle \nu, \varphi(\omega) \rangle \geqslant \langle \nu_n^{\omega}, \varphi(\omega) \rangle$$

où $\langle \nu, \varphi \rangle$ désigne la dualité $((\mathcal{M}^b(R^m))^q, (\mathcal{C}^b(R^m))^q)$

Q_n étant positive on a :

$$\int_{\Omega} \underset{\nu \in C_n}{\mathrm{Max}} \langle \nu, \varphi \rangle \, dQ_n \geqslant \int_{\Omega} \langle \nu_n, \varphi \rangle \, dQ_n$$

L'application

$\omega \dashrightarrow \underset{\nu \in C_n(\omega)}{\mathrm{Max}} \langle \nu, \varphi(\omega) \rangle$ est s.c.s car C_n est une multiapplication s.c.s ;et $(\omega, \nu) \dashrightarrow \langle \nu, \varphi \rangle$ est continue;notons Ψ_n cette fonction. (Berge[2])

C_n étant décroissante il en est de même de Ψ_n

$\Psi_n(\omega) \downarrow \Psi(\omega) = \underset{\nu \in C(\omega)}{\max} \langle \nu, \varphi(\omega) \rangle$ car $C_n(\omega) \downarrow C(\omega)$,$\Psi(\omega)$ est donc s.c.s

Le lemme 1.7 montre alors que

$$\limsup_n \int \underset{\nu \in C_n}{\mathrm{Max}} \langle \nu, \varphi \rangle \, dQ_n \leqslant \int \underset{\nu \in C}{\mathrm{Max}} \langle \nu, \varphi \rangle \, dQ$$

Comme

$$\int_{\Omega} \underset{\nu \in C}{\mathrm{Max}} \langle \nu, \varphi \rangle \, dQ = \underset{\nu \in C}{\mathrm{Max}} \int_{\Omega} \langle \nu, \varphi \rangle \, dQ$$

il vient

$$\limsup_n \int_{\Omega} \langle \nu_n, \varphi \rangle \, dQ_n = \underset{\nu \in C}{\mathrm{Max}} \int_{\Omega} \langle \nu, \varphi \rangle \, dQ$$

et donc comme

$\nu_n Q_n \dashrightarrow R = \nu_Q$ grâce au lemme 1.6

on obtient

$$\int_{\Omega} \langle \nu, \varphi \rangle \, dQ \leq \int \underset{\nu \in C}{\mathrm{Max}} \langle \nu, \varphi \rangle dQ \qquad \varphi \in \tilde{\Phi} \quad (\mathcal{C}^b(\Omega \times R^m))^q$$

ce qui peut se réécrire

$$(1.15) \quad 0 \geq \sup_{\varphi \in \Phi} \left\{ \langle\langle \varphi, R \rangle\rangle - \sup_{r \in CQ} \langle\langle \varphi, r \rangle\rangle \right\}$$

où $\langle\langle \ , \ \rangle\rangle$ désigne la dualité séparante Bourbaki Int.ch.9 p.59 [7]

$((\mathcal{C}^b(\Omega \times R^m))^q, (\mathcal{M}^b(\Omega \times R^m))^q)$

CQ étant un ensemble convexe fermé grâce au lemme 1.8; $R \in CQ$ en effet s'il en était autrement R étant un convexe compact, CQ étant un convexe fermé il existerait un hyperplan séparant strictement R de CQ th. de Hahn Banach géométrique dans les E.V.T. L.S et donc $\exists \tilde{\varphi} (\mathcal{C}^b(\Omega \times R^m))^q$ tel que

$$\langle\langle R, \tilde{\varphi} \rangle\rangle > \sup_{r \in CQ} \langle\langle r, \tilde{\varphi} \rangle\rangle$$

ce qui est en contradiction avec (1.15)

Et donc

$R = \nu Q \in CQ$ et donc $\nu \in C$ Qp.p c.q.f.d.

1.4) Théorème d'existence du problème de martingale

Nous allons donner le th. fondamental de cette partie mais au par avant donnons deux lemmes

Lemme 1.9

Soit la multiapplication

$\tilde{C}: \Omega \longrightarrow R^{q-1} \times \mathcal{M}_+^b(R^m)$ s.c.s

$\tilde{c} \in \tilde{C} \quad \tilde{c} = (c_1, \ldots\ldots, c_{q-1}, \nu)$.

μ étant une mesure de probabilité sur R^m, définissons alors la multi-application

$$C : \Omega \dashrightarrow (\mathcal{M}_+^b(R^m))^q$$
$$\omega \quad \{c \mid c = (c_1 \mu(dy), \ldots\ldots, c_{q-1} \mu(dy), \nu(dy)) \quad \tilde{c} \in C(\omega)\}$$

alors C ainsi défini est s.c.s, de plus si $\tilde{C}_n \downarrow \tilde{C}$ alors $C_n \downarrow C$

démonstration

Montrons que C est s.c.s, pour cela soient

$$\omega_n \dashrightarrow \omega$$

$$c_n \dashrightarrow c \qquad c_n \in C(\omega_n)$$

montrons que $c \in C(\omega)$

$$c_n \in C(\omega_n) \quad \exists \tilde{c}_n \in \tilde{C}(\omega_n) \quad c_n^i = \tilde{c}_n^i \ \mu(dy), i = 1 \ldots q-1$$

$$c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c \qquad \int \sum_{i=1}^{q-1} \tilde{c}_n^i \ (y)\varphi^i(dy) + \nu_n(dy)\varphi^q(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int \sum_{i=1}^{q} c^i(dy)\varphi^i(y)$$

$\tilde{C}$ étant s.c.s $(\tilde{c}_n^i \ i=1..q-1, \nu_n) \dashrightarrow (\tilde{c}^i \ i=1\ldots q-1, \nu) \in \tilde{C}(\omega)$

et donc

$$\sum_{i=1}^{q-1} \tilde{c}^i \int \mu(dy)\varphi^i(y) + \nu(dy)\varphi^q(y) = \int \sum_{i=1}^{q} c^i(dy)\varphi^i(y) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^b(R^m; R^q)$$

$$c^i(dy) = \tilde{c}^i \mu(dy) \quad c^q(dy) = \nu(dy)$$

On montre de même le deuxieme point.

Lemme 1.10

Soit sur $D = \Omega$ l'ensemble $A = \{(\omega, t) \in \Omega \times [0,T] \ \ (\omega,t) \dashrightarrow X_{t^-}(\omega)$ est continue$\}$ P une mesure de probabilité sur Ω, Q la mesure $P \times dt$ alors $Q(A) = 1$.

démonstration

$\{ t: P\{\omega : X_t(\omega) \neq X_{t^-}(\omega)\} \neq 0 \}$ est dénombrable ch3 §1.5 [3]

$\Rightarrow Q\{(\omega, t); X_t(\omega) \neq X_{t^-}(\omega)\} = 0$.

Théorème 1.1

$$\exists \rho, \alpha, \beta : \bigcap_N \overline{\bigcup_{n \geq N} \mathcal{S}(n,K,C)} \neq \emptyset$$

d'autre part

$$\mathcal{S}(K,C) \supset \bigcap_N \overline{\bigcup_{n \geq N} \mathcal{S}(n,K,C)} \quad \text{et donc} \quad \mathcal{S}(K,C) \neq \emptyset$$

démonstration

1) $\rho, \alpha, \beta \quad \bigcap_N \overline{\bigcup_{n \geq N} \mathcal{S}(n,K,C)} \neq \emptyset$

En effet soit (b, a, ν) une section borélienne de la multiapplication C définie en 1.1

Notons $\mathcal{N}(b,a)$ une loi de Gauss de moyenne b et de moment d'ordre 2 a, alors notons:

$$\pi_{s,x} = \frac{1}{(1+k)} \mathcal{N}(b_{s,x}(1+k), a_{s,x}(1+k)) + h\nu_{s,x} \quad ; \quad k = h\nu_{s,x}(U) .$$

$$\pi_{s,x} = \pi^1_{s,x} + \pi^2_{s,x} .$$

$$\pi^1_{s,x} = \frac{1}{(1+k)} \mathcal{N}(b_{s,x}(1+k), a_{s,x}(1+k)) .$$

$\pi^{2,x}_{s,x} = h\nu_{s,x}$ (avec les notations de 1.2) $\pi^{2,x}_{s,x}$ est l'image par la translation de $-x$ de $\pi^2_{s,x}$.

$\pi_{s,x} \in \Pi^{n,C,\rho,2,3}_{(s,x)}$ pour ρ suffisamment grand et donc la mesure $P^n_{\pi,y} \in \mathcal{S}(n,K,C)$ pour $y \in K$.

La suite $\{P^n_{\pi,y}\}$ est étroitement relativement compacte, il existe donc une sous suite $\{P^{n'}\}$ convergeant vers P.

$$P \in \bigcap_N \overline{\bigcup_{n \geq N} \mathcal{P}(n,K,C)}$$

et donc

$$\bigcap_N \overline{\bigcup_{n \geq N} \mathcal{P}(n,K,C)} \neq \phi$$

2) $\mathcal{P}(K,C) \supset \bigcap_N \overline{\bigcup_{n \geq N} \mathcal{P}(n,K,C)}$ pour ρ suffisamment grand $\alpha=2, \rho=3$

Soit $P \in \bigcap_N \overline{\bigcup_{n \geq N} \mathcal{P}(n,K,C)}$

$\exists$ une suite $\{P^n\}$, $P^n \in \mathcal{P}(n,K,C)$ $P^n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$ montrons que $P \in \mathcal{P}(K,C)$

2.1) Montrons $\exists y \in K$ $P(X_o=y)=1$

$P^n \in \mathcal{P}(n,K,C) \Rightarrow \exists y_n \in K$: $P^n(X_o=y_n)=1$;

$y^n \in K$ compact de R^m et donc il existe une sous suite $y_{n'} \to y \in K$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^b(R^m)$ alors

$E_{P^{n'}} \varphi(X_o) = \varphi(y_{n'}) \xrightarrow[n'\to\infty]{} \varphi(y)$ car φ est continue

$E_{P^{n'}} \varphi(X_o) \xrightarrow[n'\to\infty]{} E_P \varphi(X_o)$ car $\omega \dashrightarrow \varphi(X_o(\omega))$ est continue

P p.s page 124 P.Billingsley [3] et donc

$\varphi(y) = E_P \varphi(X_o)$ $\forall \varphi \in \mathcal{C}^b(R^m)$ et donc $P(X_o=y)=1$.

2.2) Considérons maintenant la suite d'espace mesuré $\{\Omega \times [0,T], F \times \mathcal{B}, Q_n\}$ avec

$$Q_n(d\omega x dt) = P_n(d\omega) \otimes \frac{T}{n} \sum_{j=o}^{n} \delta_{jh}(dt)$$

Q_n converge étroitement vers $P(d\omega)\otimes dt$.

Montrons qu'il existe $c(s,\omega)$ prévisible vérifiant:

$c(s,\omega)\in C(s,X_{s^-}(\omega))$

$\forall\varphi\in\Phi \quad \varphi(X_t)-\int_0^t L_c\varphi(s,\omega)ds$ est une (P,F_t) martingale

Or $P^n\in\mathcal{S}(n,K,C)$ il existe donc $\pi_{s,x}=\pi^1_{s,x}+\pi^2_{s,x}$

$c_n(s,x) =(b_n(s,x),a_n(s,x),\nu^n_{s,x}(du))\in C(s,x)$ avec:

$\int(y-x)\pi^1_{s,x}(dy)=b_n(s,x)h$

$\int(y-x)^{\otimes 2}\pi^1_{s,x}(dy)=a_n(s,x)h$

$\pi^{2,x}_{s,x}(du)=\nu^n_{s,x}(du)h$

Donnons nous une mesure de probabilité fixe μ et notons

$\check{c}_n(s,x)=(b_n(s,x)\mu(du),a_n(s,x)\mu(du),\nu(s,x;du))$

$\check{C}_n$ la multiapplication correspondante

Considérons alors la suite de mesure $\check{c}_n(s,X_s(.))Q_n$

a valeur dans $(\mathcal{M}^b_+(\Omega\times[0,T]\times R^m)^q$ avec $q=m+\frac{m}{2}(m+1)+1$

(1.16) $\check{c}_{n'}Q_{n'} \xrightarrow[n'\to\infty]{} \check{c}Q$ avec $\check{c}(s,\omega)\in\check{C}(s,X_{s^-}(\omega))$ Q p.s

en effet la multiapplication $(s,\omega)\dashrightarrow C(s,X_{s^-}(\omega))$ est s.c.S Q p.s car $(s,x)\dashrightarrow C(s,x)$ est s.c.s, $(s,\omega)\dashrightarrow(s,X_{s^-}(\omega))$ est continue Q p.s grâce au lemme 1.10;le lemme 1.9 montre la s.c.s de $\check{C}$;la proposition 1.13 donne alors(1.16).

Notons alors la projection sur la tribu des prévisibles de $\check{c}(s,\omega)$ par $\hat{c}(s,\omega)$, c.a.d $\forall\varphi\in\mathcal{C}^b((\Omega\times[0,T]\times R^m))^q$ previsible on a

$$\int_{\Omega\times[0,T]\times R^m}(\varphi,\check{c}\; Q)(d\omega\times dt\times du)=\int_{\Omega\times[0,T]\times R^m}(\varphi,\hat{c}\; Q)(d\omega\times dt\times du)$$

(,) désignant ici le produit scalaire dans R^q

et donc si $\psi\in(\mathcal{C}^b(R^m))^q$

$E_Q(\langle\psi,\check{c}(s,\omega)\rangle|\mathcal{P})=\langle\psi,\hat{c}(s,\omega)\rangle$ $\langle,\rangle$ étant le produit de dualité $((\mathcal{M}^b(R^m))^q, \mathcal{C}^b(R^m)^q)$

$\check{c}(s,\omega)\in\check{C}(s,X_{s^-}(\omega))$ on a donc

$$\langle\psi,c(s,\omega)\rangle\leqslant \sup_{c\in\check{C}(s,X_{s^-}(\omega))}\langle\psi,c\rangle$$

et donc

$$E(\langle\psi,\check{c}(s,\omega)\rangle|\mathcal{P})=\langle\psi,\hat{c}(s,\omega)\rangle\leqslant E(\sup_{c\in\check{C}(s,X_{s^-}(\omega))}\langle\psi,c\rangle|\mathcal{P}) = \sup_{c\in\check{C}(s,X_{s^-}(\omega))}\langle\psi,c\rangle$$

la dernière égalité provenant du fait que $X_s^-(\omega)$ est prévisible.

On a donc

$$\langle\psi,\hat{c}(s,\omega)\rangle\leqslant \sup_{c\in\check{C}(s,X_{s^-}(\omega))}\langle\psi,c\rangle \quad Qp.s$$

et le th. de Hahn Banach montre alors que :

$$\hat{c}\in\check{C}(s,X_{s^-}(\omega))$$

Pour finir la démonstration il reste à montrer (1.15)

soit $\varphi\in\Phi$ notons

$$Z^n_\varphi(t_1,t_2,\omega)=\int_{t_1}^{t_2^-} h\sum_{j=o}^{n-1}\delta_{jh}(ds)\int_{R^m}[\varphi((j+1)h,y)-\varphi(jh,X_{jh})]\pi^n_{jh,X_{jh}}(dy)$$

Soit ϕ F_{t_1} mesurable

$k_nh \dashrightarrow t_2$

$l_nh \searrow t_1$

$$o=E_{P^n}\{[\varphi(k_nh,X_{k_nh})-\varphi(l_nh,X_{l_nh})-Z^n_\varphi(l_nh,k_nh,\omega)]\ \phi\}$$

$$=E_{P^n}\{[\varphi(k_nh,X_{k_nh})-\varphi(l_nh,X_{l_nh})-\int_{l_nh}^{k_nh^-}L_{\check{c}_n}\varphi(s,\omega)h\sum_{j=o}^{n-1}\delta_{jh}ds)]\ \phi\} \tag{1.17}$$

$$+E_{P^n}\{[\int_{l_nh}^{k_nh^-}L_{\check{c}_n}\varphi(s,\omega)h\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{jh}(ds)-Z^n(l_nh,k_nh,\omega)]\phi\} \tag{1.18}$$

Grâce au lemme 1.4 on a:

$$\operatorname*{Lim}_{n}\ \sup_{P^n} E_{P^n}\left\{\phi \int_{l_nh}^{k_nh} L_{\check{c}_n}\varphi(s,\omega)h\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{jh}(ds)-Z^n(l_nh,k_nh,\omega)\right\}=0$$

où:

$$L_{\check{c}_n}\varphi(s,\omega)= D_s\varphi+\sum_{i=1}^{m}\int_{R^m} D_{x_i}\varphi b_i\mu(du)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\int_{R^m} D^2_{x_ix_j}\varphi a_{ij}\mu(du)$$

$$+\int_{R^m}(\varphi(s,X_{s^-}(\omega)+u)-\varphi(s,X_{s^-}(\omega)))\nu(s,\omega;du)=L_{c_n}\varphi(s,\omega).$$

d'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} E_{P^n}\left\{\Phi\left[\varphi(k_nh,X_{k_nh})-\varphi(l_nh,X_{l_nh})-\int_{l_nh}^{k_nh} L_{\check{c}_n}\varphi(s,\omega)h\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{jh}(ds)\right\}\right.$

$$=E_P\left\{\Phi\left[\varphi(t_2,X_{t_2})-\varphi(t_1,X_{t_1})-\int_{t_1}^{t_2} L_{\check{c}}\,(s,\omega)\,ds\right]\right\}$$

grâce à la definition de c (1.16) ,au fait que l'application $(s,\omega)\dashrightarrow X_s(\omega)$ est continue Q p.s .Cette égalité ayant lieu pour tout t_1 et t_2 en dehors d'un ensemble dénombrable grâce à Billingsley [3] page 124.On obtient alors le résultat $\forall t_1$ et t_2 grâce à la continuité à droite des trajectoires.

Enfin

$$E_P\int_{t_1}^{t_2} L_{\check{c}}\varphi(s,\omega)ds=E_P\int_{t_1}^{t_2}L_{\hat{c}}\varphi(s,\omega)ds$$ par définition de $\hat{c}$,

$\hat{c}\in C$ et donc $\exists c\in C$ vérifiant

$$E_P\int_{t_1}^{t_2} L_{\hat{c}}\varphi(s,\omega)ds=E_P\int_{t_1}^{t_2}L_c\varphi(s,\omega)ds \text{ c.q.f.d.}$$

1.5) <u>Existence d'une solution faible de l'équation de Fokker Planck</u>

Soit C la multiapplication definie en 1.1, on dira que p_t est solution faible de l'équation de Fokker Planck s'il existe $c(s,x)$ section borélienne de $C(s,x)$ telle que :

(1.27) $p_t \in \mathcal{M}_+^1(R^m)$

(1.28) $p_o(dx)=\delta_y(dx)$

$\forall \varphi \in \Phi$ on ait

(1.29) $\displaystyle \int \varphi(T,x)p_T(dx)-\varphi(o,y) - \int_o^T\int_{\mathbb{R}^m} L_c\varphi(t,x)p_t(dx)dt=o$

avec

(1.30) $\displaystyle L_c\varphi(t,x)=D_t\varphi(t,x)+b(t,x).D_x\varphi(t,x)+ \sum_{i,j} a_{ij}(t,x)D^2\varphi(t,x)$

$$+\int_U(\varphi(t,x+u)-\varphi(t,x))\nu_{t,x}(du)$$

On notera $\mathcal{M}(K,C)$ l'ensemble des solutions faibles de l'équation de Fokker Planck

Théorème 1.2

$\mathcal{M}(K,C)\neq 0$

démonstration

$P\in\mathcal{S}(K,C)=0$

Il lui correspond p_t par l'application $\omega \dashrightarrow X_t(\omega)$. p_t vérifie (1.19) en effet il suffit de prendre $\tilde{c}(s,x)$=projection de $\hat{c}(s,\omega)$ sur la tribu du présent plus petite tribu sur $\Omega\times[0,T]$ rendant mesurble les fonctions $f(t,X_t(\omega))$ f continue, on a alors

$$o=E_P\varphi(T,X_T)-\varphi(o,y)-\int_o^T L_{\hat{c}}\,(s,\omega)ds$$
$$=\int\varphi(T,x)p_T(dx)-\varphi(o,y)-\int_o^T\int_{R^m} L_{\tilde{c}}\varphi(s,x)p_s(dx)$$
$$=\int\varphi(T,x)p_T(dx) -\varphi(o,x)-\int_o^T\int_{R^m} L_c\varphi(s,x)p_s(dx)$$

avec $\tilde{c}=(c_1\mu\ldots.c_{q-1}\mu,\nu)$ et $c=(c_1\ldots\ldots c_{q-1},\nu)$.

On peut montrer de plus, par un raisonnement analogue àcelui utilisé dans la démonstration du th.1.1 que $c(s,x)\in C(s,x)$.

2) Quelques propriétés de $\mathcal{P}(K,C)$

Théorème 2.1

$\mathcal{P}(y,C)$ est un convexe compact de $\mathcal{M}_+^1(\Omega)$

On va démontrer ce théorème grâce à trois lemmes

Lemme 2.1

$\mathcal{P}(K,C)$ est étroitement relativement compact

démonstration

On utilise le critère de relative étroite compacité th.15.3 Billingsley[3]

$\mathcal{P}(K,C)$ est étroitement relativement si et seulement si

(2.1) $\forall \eta>0\ \exists\alpha\quad P\{\omega:\ \sup_t |X_t|\geqslant\alpha\}<\eta \qquad \forall P\in\mathcal{P}(K,C)$

(2.2) $\forall\varepsilon,\eta>0,\ \exists\delta,\ 0<\delta<T\quad P\{\omega:\sup_{s,t<\delta}|X_t-X_s|>\eta\}\leqslant\varepsilon \qquad \forall P\in\mathcal{P}(K,C)$

(2.3) $\forall\varepsilon,\eta>0,\ \exists\delta,\ 0<\delta<T\quad P\{\omega:\sup_{T-\delta\leqslant s,t<T}|X_t-X_s|>\eta\}\leqslant\varepsilon \qquad \forall P\in\mathcal{P}(K,C)$

(2.4) $\forall\varepsilon,\eta>0,\ \exists\delta,\ 0<\delta<T\quad P\{\omega:\sup_{\substack{0\leqslant t_1\leqslant t\leqslant t_2\leqslant T\\ |t_2-t_1|\leqslant\delta}}\min(|X_t-X_{t_1}|,|X_t-X_{t_2}|)\} \qquad \forall P\in\mathcal{P}(K,C)$

En effet soit $P\in\mathcal{P}(K,C)$

$\exists c(s,\omega)\in C(s,X_s(\omega))$ prévisible avec

$c(s,\omega)=(b(s,\omega),a(s,\omega),\nu(s,\omega;du))$

tel que

$$X_t-\int_0^t b(s,\omega)ds-\int_0^t\int_U u\,\nu(s,\omega;du)=M_t$$

avec

$$M_t=\int_0^t\sigma(s,\omega)dW_s+\int_0^t\int_U u(\mu(\omega;du\times dt)-\nu(s,\omega;du))dt$$

où $\mu(s,\omega;du\times dt)$ est définie par

$$\mu(s,\omega;du\times dt)=\sum_s \mathbb{1}^{(s)}_{X_s(\omega)\neq X_{s^-}(\omega)}\,\delta_{s,X_s(\omega)-X_{s^-}(\omega)}\,(dt\times du)$$

et σ tel que $\sigma\sigma^*=a$

démonstration de 2.1

Il suffit de montrer que

$$E\{\sup_{t\in[0,T]}|X_t|^2\}\leqslant k_1$$

or

$$E\{\sup|X_t|^2\}\leqslant k_2\ T\int_0^T\sup_{c\in C}|b|^2+(\int_0^T\sup_{c\in C}\int_U u^2\nu(s,\omega;du))\int_0^T\sup_{c\in C}\nu(s,\omega;U)$$

$$E\{\sup_t|M_t|^2\}$$

or $E\{\sup_{t\leqslant T}|M_t|^2\}\leqslant E\,A_t$ où A_t désigne le processus croissant de M_t egal ici à

$$E\int_0^t a(s,\omega)ds+E\int_0^t\int_U u^2\nu(s,\omega;du)$$

En utilisant l'hypothèse sur C on obtient

$$\int_0^T\sup_{c\in C}|b|^2\,ds\leqslant TM_1^2$$

$$\int_0^T\sup_{c\in C}a\,ds\leqslant TM_2$$

$$\int_0^T ds\sup_{c\in C}\int_U\nu(du)\leqslant TM$$

$$\int_0^T ds\sup_{c\in C}\int_U u^2\nu(du)\leqslant TM_3$$

La démonstration de(2.2) et de (2.3) est la même que celle de (2.1) en remarquant que dans ce cas $T=\delta$

démonstration de (2.4)

D'aprés la démonstration du th.15.6 de Billingsley [3] il suffit de montrer

(2.5) $\exists k_1 \quad \varphi(t_1,t,t_2)=E_P(\,|X_{t_2}-X_t|^2\,|X_t-X_{t_1}|^2) \leqslant k_1\,|t_2-t_1|^2$

$\forall P \in \mathcal{P}(K,C) \qquad o \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \leqslant T$

démontrons (2.5)

(2.6) $E_P(\,|X_{t_2}-X_t|^2\,|X_t-X_{t_1}|^2) = E(E(\,|X_{t_2}-X_t|^2\,|F_t)(|X_t-X_{t_1}|^2)$

$E(\,|X_{t_2}-X_t|^2\,|F_t)$ est majoré de la même facon que dans la démonstration de (2.1) et on obtient

$E(\,|X_{t_2}-X_t|^2\,|F_t) \leqslant k_2\,|t_2-t|$

et donc

$E(|X_{t_2}-X_t|^2\,|X_t-X_{t_1}|^2) \leqslant k_2\,|t_2-t|\,E\,|X_t-X_{t_1}|^2$

De la même manière on montre

$E\,|X_t-X_{t_1}|^2 \leqslant k_2\,|t-t_1|$ d'où le resultat (2.5).

<u>Lemme 2.2</u>

<u>$\mathcal{P}(y,C)$ est fermé</u>

$P_n \in \mathcal{P}(y,C)$

$P_n \to P$

Montrons que $P \in \mathcal{P}(y,C)$

$P_n \in \mathcal{P}(y,C) \Rightarrow \exists\, c_n(s,\omega) \in C(s,X_{s^-})$:

$\varphi(t,x_t)-\varphi(o,x_o)-\int_o^t L_{c_n}\varphi\,ds$ est une (P_n,F^t) martingale.

$P_n \otimes dt$ est étroitement relativement compacte et converge vers $P \otimes dt$.

$c_n P_n \otimes dt$ est étroitement relativement compacte et converge vers $c P \otimes dt$ avec $c(s,\omega)\ C(s,X_{s^-}(\omega))$ grâce à la proposition 1.3.

On en déduit alors :

$\varphi(t,X_t)-\varphi(o,X_o)-\int_o^t L_c\varphi ds$ est une (P,F_t) martingale c.q.f.d.

Lemme 2.3

$\mathcal{P}(y,C)$ est convexe

démonstration

Soit P_1 et $P_2 \in \mathcal{P}(y,C)$, il existe alors $\check{c}_1(s,\omega)$ et $\check{c}_2(s,\omega) \in \check{C}(s,\omega)$

prévisibles tels que :

(2.7) $\varphi(t,X_t)-\varphi(u,X_u)-\int_u^t L_{\check{c}_1}\varphi(s,\omega)ds$ est une $(P1,F_t)$ martingale

(2.8) $\varphi(t,X_t)-\varphi(u,X_u)-\int_u^t L_{\check{c}_2}\varphi(s,\omega)ds$ est une (P_2,F_t) martingale

Alors on a la désintégration

$\lambda\check{c}_1P_1 + (1-\lambda)\check{c}_2P_2=\check{c}_\lambda(\lambda P_1+(1-\lambda)P_2)$

$\hat{c}_\lambda(s,\omega)$ la projection prévisible de $\check{c}_\lambda(s,\omega)$ alors

$\varphi(t,X_t)-\varphi(u,X_u)-\int_u^t L_{\hat{c}}\,\varphi(s,\omega)ds$ est une $(\lambda P_1+(1-\lambda)P_2,F_t)$ martingale

En effet $\forall \Psi$, F_u mesurable

$$E_{\lambda P_1+(1-\lambda)P_2}\left\{\left[\varphi(t,X_t)-\varphi(u,X_u)-\int_u^t L_{\hat{c}_\lambda}\varphi(s,\omega)ds\right]\Psi\right\}$$

$$=\lambda E_{P_1}\left\{\left[\varphi(t,X_t)-\varphi(u,X_u)-\int_u^t L_{\check{c}_1}\varphi(s,\omega)ds\right]\Psi\right\}$$

$$+(1-\lambda)E_{P_2}\left\{\left[\varphi(t,X_t)-\varphi(u,X_u)-\int_u^t L_{\check{c}_2}\varphi(s,\omega)ds\right]\Psi\right\}$$

Montrons que $\hat{c}_\lambda(s,\omega)\in\check{C}(s,X_s(\omega))$ $(\lambda P_1+(1-\lambda)P_2)\times dt$ p.s.

Soit $\varphi\in(\mathcal{C}^b(\Omega\times[0,T]\times R^m))^q$

$Q_1=\frac{1}{T}P_1\times dt$

$Q_2=\frac{1}{T}P_2\times dt$

on a

$$E^{Q_1+(1-\lambda)Q_2}\langle\check{c}_\lambda,\varphi\rangle = E^{Q_1}\langle\check{c}_1,\varphi\rangle+(1-\lambda)E^{Q_2}\langle\check{c}_2,\varphi\rangle$$

$$\leqslant \lambda E^{Q_1}\operatorname*{Max}_{\check{c}\in\check{C}}\langle\check{c},\varphi\rangle+(1-\lambda)E^{Q_2}\max_{\check{c}\in\check{C}}\langle\check{c},\varphi\rangle$$

$$E^{Q_1+(1-\lambda)Q_2}\max_{\check{c}\in\check{C}}\langle\check{c},\varphi\rangle$$

On en déduit par un raisonnement analogue à celui de la proposition 1.3 que $\check{c}\in\check{C}$,un raisonnement analogue à celui de la fin de la démonstration du th.1.1 on en déduit $\hat{c}_\lambda(s,\omega)\in\check{C}(s,X_{s-}(\omega))$ d'où le lemme ∎

Soit $P\in\mathcal{S}(y,C)$ donnons quelques propriétés de la loi de probabilité du vecteur

$(X_o,X_h,\ldots\ldots,X_{nh})$ avec $h=\frac{T}{n}$

Cette loi de probabilité peut s'écrire

$$\delta_y(dx_o)\pi^1_{x_o}(dx_1)\ldots\ldots\ldots\pi^n_{x_o,x_1\ldots\ldots x_{n-1}}(dx_n)$$

Notons:

$C_{h,\varepsilon}(t,x)=\overline{C^o}\bigcup_{\substack{t\leq s\leq t+h\\ |x-z|\leq\varepsilon}} C(s,z)$ (où $\overline{C^o}$ désigne la fermeture convexe)

$\overset{\varepsilon}{K}(t,x)=\{\omega:\sup_{t\leq s\leq t+h}|X_s(\omega)-X_t(\omega)|\leq\varepsilon\}$

$\tau^{\varepsilon}_{x,t}=\inf\{s\geq t,\ |X_s-x|>\varepsilon\}$

$\tau^{\varepsilon,h}_{x,t}=\tau^{\varepsilon}_{x,t}\wedge(t+h)$

$\alpha_\tau:\Omega\dashrightarrow\Omega$

$\omega \qquad \alpha\omega \qquad \alpha\omega(s)=\begin{cases}\omega(s) & s\leq\tau^{\varepsilon,h}_{x,t}(\omega)\\ \omega(\tau(\omega)) & s\geq\tau^{\varepsilon,h}_{x,t}(\omega)\end{cases}$

Lemme 2.4

$\exists\ \pi^1_i,\ \pi^2_i\ :\ \pi^1_i+\pi^2_i=\pi_i$

$\left(\int(y-x)\pi^1_i(dy),\ \int(y-x)^{\otimes 2}\pi^1_i(dy),\pi^{2\chi}_i(du)\right)\in\left[C_{h,\varepsilon}(t,x)h+\mathcal{V}(\delta)\right]\cap E$

avec $t=(i-1)h$, $\delta=k\frac{h^2}{\varepsilon^2}$ où k est une constante dépendant de C

$\mathcal{V}(\delta)$ désigne un voisinage fort de o dans $E=R^q\times\mathcal{M}^b(R^m)$ où $\mathcal{M}^b(R^m)$ est muni de la topologie $|\nu-\mu|=\int_{R^m}|\nu-\mu|(dy)$

démonstration

$P\in\mathcal{P}(y,C)$

$\tilde{F}_t=\sigma(X_{t_i},t_i=ih,\ t_i\leq t)$

Prenons

$\pi^2_i=E^{\tilde{F}_{t_i}}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\nu(s,\omega;du)$ et donc $\pi^1_i=\pi_i-\pi^2_i$ avec les notations de 1.2. On a donc en notant $X_{t_i}=x$

(2.9) $\int(y-x)\pi^1_i(dy)=E^{\tilde{F}_{t_i}}\ E^{F_{t_i}}\int_{t_i}^{t_{i+1}}b(s,\alpha_\tau(\omega))ds+\int_{t_i}^{t_{i+1}}(b(s,\omega)-b(s,\alpha_\tau(\omega))ds$

(2.10) $\int(y-x)^{\otimes 2}\pi^1_i(dy)=E^{\tilde{F}_{t_i}}\ E^{F_{t_i}}\int_{t_i}^{t_{i+1}}a(s,\alpha_\tau(\omega))ds+\int_{t_i}^{t_{i+1}}(a(s,\omega)-a(s,\alpha_\tau(\omega))ds$

$$+2\int_{t_i}^{t_{i+1}}(X_s-x)\otimes b(s,\omega)ds+2\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_U(X_s-x)\otimes u\nu(s,\omega;du)ds\Big]$$

(2.11) $\tilde{\pi}_i^{2\gamma}(du)=E^{F_{t_i}}\,E^{F_{t_i}}\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\nu(s,\alpha_\gamma\omega;du)ds+\int_{t_i}^{t_{i+1}}ds(\nu(s,\omega;du)-\nu(s,\alpha_\gamma\omega;du))\Big)$

Remarquons alors que

(2.12) $\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}b(s,\alpha_\gamma\omega)ds,\int_{t_i}^{t_{i+1}}a(s,\alpha_\gamma\omega)ds,\int_{t_i}^{t_{i+1}}\nu(s,\alpha_\gamma\omega;du)ds\right)\in C_{h,\varepsilon}(t_i,x)h$

Majorons alors dans (2.9)(2.10)(2.11) les termes residuels

$$E^{F_{t_i}}\int_{t_i}^{t_{i+1}}|b(s,\omega)-b(s,\alpha_\gamma\omega)|ds\leq 2hM_1P^{F_{t_i}}(C_{K_\varepsilon})$$

$$E^{F_{t_i}}\int_{t_i}^{t_{i+1}}|(X_s-X_{t_i})\otimes b(s,\omega)|ds\leq hM_1E^{F_{t_i}}\sup_{t_i\leq s\leq t_{i+1}}|X_s-X_{t_i}|$$

$$E^{F_{t_i}}\int_{t_i}^{t_{i+1}}|a(s,\omega)-a(s,\alpha_\gamma\omega)|ds\leq 2hM_2P^{F_{t_i}}(C_{K_\varepsilon})$$

$$E^{F_{t_i}}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_U|(X_s-x)\otimes u|\nu(s,\omega;du)ds\leq hM_3E^{F_{t_i}}\sup_{t_i\leq s\leq t_{i+1}}|X_s-X_{t_i}|$$

$$E^{F_{t_i}}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_U|\nu(s,\omega;du)-(s,\alpha_\gamma\omega,du)|\leq 2hP^{F_{t_i}}(CK_\varepsilon)$$

Il reste donc à montrer que

$$P^{F_{t_i}}(C_{K_\varepsilon})\leq\frac{kh}{\varepsilon^2}$$

$$E^{F_{t_i}}\sup_{t_i\leq s\leq t_{i+1}}|X_s-X_{t_i}|\leq\varepsilon P^{F_{t_i}}(K)+\frac{1}{\varepsilon}E^{F_{t_i}}\sup_{t_i\leq s\leq t_{i+1}}|X_s-X_{t_i}|^2\leq\frac{kh}{\varepsilon}$$

or

$$P^{F_{t_i}}(C_{K_\varepsilon})\leq\sup_{t_i}P^{F_{t_i}}\{\omega:\sup_{t_i\leq s\leq t_{i+1}}|X_s-X_{t_i}|\geq\varepsilon\}\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\sup_{t_i}E^{F_{t_i}}\sup_{t_i\leq s\leq t_{i+1}}|X_s-X_{t_i}|^2$$

$$\leq k_1\frac{h^2}{\varepsilon^2}+k_2\frac{h}{\varepsilon^2}$$

Le deuxieme terme est obtenu en utilisant le th. de Doob

$E\{\sup_{s\leq t}M_s^2\}\leq E\,M_t^2$ si M_t est une martingale de carré intégrable.

de même on obtient que

$E^{F_{t_i}}\sup_{t_i\leq s\leq t_{i+1}}|X_s-X_{t_i}|^2\leq k_1h^2+k_2h$ d'où le lemme

lemme 2.5

π_i^1 défini dans le lemme 2.4 vérifie de plus

$\int |y-x|^3 \pi_i^1(dy) \leqslant k_1 h^{3/2}$ avec k_1 ne dépendant que de C

démonstration

Par l'application de la formule d'Ito en considérant $|X_t - X_s|^3$ comme fonction de X_t

$$|X_t-X_s|^3 = 3\int_s^t (|X_\tau - X_s|(X_\tau - X_s), b(\tau,\omega))d\tau$$
$$+3\int_s^t tr\left\{\left[(X_\tau - X_s)\otimes\frac{(X_\tau - X_s)}{|X_\tau - X_s|} + |X_\tau - X_s| I\right] a(\tau,\omega)\right\} d\tau$$
$$+\int_U\int_s^t (|X_\tau - X_s + u|^3 - |X_\tau - X_s|^3)\nu(\tau,\omega;du)d\tau + M_t$$

où M_t est une martingale

Et donc en utilisant la définition de π_i^1 du lemme précédent

$$(2.13)\quad \int |y-x|^3 \pi_i^1(dy) = E^{\widetilde{F}_{t_i}} E^{F_{t_i}} 3\int_{t_i}^{t_{i+1}} (|X_t - X_{t_i}|(X_t - X_{t_i}), b(t,\omega))dt$$
$$+3\int_{t_i}^{t_{i+1}} tr\left\{\left[(X_t - X_{t_i})\otimes\frac{(X_t - X_{t_i})}{|X_t - X_{t_i}|} + |X_t - X_{t_i}| I\right] a(t,\omega)\right\}dt$$
$$+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_U (|X_t - X_{t_i} + u|^3 - |X_t - X_{t_i}|^3 - |u|^3)\nu(s,\omega;du)dt$$

Or

$$|X_t - X_s + u| \leqslant |X_t - X_s| + |u|$$

et donc

$$|X_t - X_s + u|^3 \leqslant |X_t - X_s|^3 + |u|^3 + 3|u|^2|X_t - X_s| + 3|X_t - X_s|^2|u|$$

et donc

$$|X_t - X_s + u|^3 - |X_t - X_s|^3 - |u|^3 \leqslant 3|u|^2|X_t - X_s| + 3|X_t - X_s|^2|u|$$

On peut donc majorer (2.13) par

$$\int |y-x|^3 \pi_i^1(dy) \leqslant k\{h \sup_{t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}} E^{\tilde{F}_{t_i}} |X_t - X_{t_i}|^2 M_1 + h \sup_{t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}} E^{\tilde{F}_{t_i}} |X_t - X_{t_i}| M_2\}$$

$$+3\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_U dt\,|u|^2 |X_t - X_{t_i}| \nu(t,\omega;du) + 3\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_U dt\,|u| |X_t - X_{t_i}|^2 \nu(t,\omega;du)$$

$$\leqslant k\; h\; E^{\tilde{F}_{t_i}} \sup_{t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}} |X_t - X_{t_i}|^2 (M_1 + M) + h\; E^{\tilde{F}_{t_i}} \sup_{t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}} |X_t - X_{t_i}| (M_2 + M_3)$$

On obtient alors le résultat en utilisant la majoration

$$E^{\tilde{F}_{t_i}} \sup_{t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}} |X_t - X_{t_i}|^2 \leqslant k_1 h$$

$$E^{\tilde{F}_{t_i}} \sup_{t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}} |X_t - X_{t_i}| \leqslant (k_1 h)^{1/2}$$

3) Commande optimale du problème de martingale

3.1) Position du problème

Soit une fonction cout

$f : \Omega \dashrightarrow R$ s.c.i bornée

on se pose le problème de commande stochastique suivant

$$(3.1) \quad \operatorname*{Min}_{P \in \mathcal{S}(y,C)} E^P f(\omega)$$

Theorème 3.1

Le problème de commande (3.1) admet une solution

démonstration

$\mathcal{P}(y,C)$ est un convexe compact d'aprés le théoreme 2.1

L'application $P \dashrightarrow E^P (f(\omega))$ est s.c.i car f est s.c.i

th 5.5 Delacherie Meyer ,d'où le théorème.

Minimisation d'un coût sur l'état final

Soit $f: R^m \dashrightarrow R$ s.c.i, alors l'application $f o X_T$ de $\Omega \dashrightarrow R$ est s.c.i car l'application $X_T : \Omega \dashrightarrow R^m$ est continue (par définition de Ω) cf. Billingsley ch.3 [3]. On est donc dans le cadre de 3.1

Remarquons que si le problème initial se formule avec un cout intégral, il est toujours possible par augmentation de l'état de se ramener à un coût sur l' état final. On a donc ainsi lethécrème général d'existence pour un problème de commande stochastique en horizon fini .

3.2 Commande de processus arrêté

Soit un ouvert de R^m , τ_σ le temps de sortie d'un ouvert σ $f: R^m \dashrightarrow R$ s.c.i alors le problème :

$\underset{P \in \mathcal{P}}{\text{Min}}\ E^P f(X_{\tau_\sigma})$ n'admet pas en général de solution , en effet l'application $\omega \dashrightarrow \tau_\sigma(\omega)$ n'est pas S.c.i et donc l'application $\omega \dashrightarrow f(X_{\tau_\sigma(\omega)}(\omega))$ ne sera pas en général s.c.i

On peut néanmoins formuler un probleme proche de (3.2) admettant une solution pour cela énonçons quelques lemmes :

Lemme 3.1

Si l'on note par $[\omega(t^-),\omega(t)] = \{x \mid \exists \lambda \geq 0, \lambda \leq 1 \ x = \lambda\omega(t^-) + (1-\lambda)\omega(t)\}$ pour $\omega \in D(0,T;R^m)$; la multiapplication

$(t,\omega) \dashrightarrow [\omega(t^-),\omega(t)]$ est s.c.s

démonstration

Soient

$t_n \dashrightarrow t$

$\omega_n \dashrightarrow \omega$ dans D

$x_n \in [\omega_n(t_n^-), \omega_n(t_n)] \dashrightarrow x^*$

montrons que : $x \in [\omega(t^-), \omega(t)]$.

Grâce à la définition de D, on a

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N\ \exists \lambda_n(t), \lambda_n(0)=0, \lambda_n(T)=T, \lambda_n \in \mathcal{C}(0,T)$, croissante

stictement:

$$\sup_t |\omega_n(\lambda_n(t)) - \omega(t)| \leqslant \varepsilon$$

$$|\lambda_n(t) - t| \leqslant \varepsilon$$

$$|x_n - x| \leqslant \varepsilon$$

et donc $\forall y \in R^m$ $|y|=1$ $\forall n > N$ on a :

$$(y,x_n) \leqslant \sup_{\substack{x,t' \\ |t'-t| \leqslant \varepsilon \\ x \in [\omega_n(t'^-), \omega_n(t')]}} (y,x) \leqslant \sup_{\substack{x,t' \\ |t'-t| \leqslant 2\varepsilon \\ x \in [\omega_n(\lambda_n(t'^-)), \omega_n\lambda_n(t')]}} (y,x) \leqslant \sup_{\substack{x,t' \\ |t'-t| \leqslant 2\varepsilon \\ x \in [\omega(t'^-), \omega(t')]}} (y,x) + \varepsilon$$

et donc

$$(y,x^*) \leqslant \sup_{\substack{t',x \\ x \in [\omega(t'^-), \omega(t')] \\ |t'-t| \leqslant 2\varepsilon}} (y,x) + \varepsilon$$

et donc en utilisant la s.c.s de $t \dashrightarrow [\omega(t^-), \omega(t)]$

$$(y,x^*) \leqslant \sup_{\substack{x \\ x \in [\omega(t^-), \omega(t)]}} (y,x) + \varepsilon \qquad \text{c.q.f.d} \quad \blacksquare$$

Définissons pour $\mathcal{O}$ ouvert de R^m

(3.3) $\tilde{\zeta}_{\mathcal{O}}(\omega)=\inf\{t: [\omega(t^-),\omega(t)] \cap C_{\mathcal{O}} \neq \phi\}$

(3.4) $\tilde{\zeta}_{\bar{\mathcal{O}}}(\omega)=\inf\{t: [\omega(t^-),\omega(t)] \cap C_{\bar{\mathcal{O}}} \neq \phi\}$

Lemme 3.2

$\omega \dashrightarrow \tilde{\zeta}_{\mathcal{O}}(\omega)$ est s.c.i

$\omega \dashrightarrow \tilde{\zeta}_{\bar{\mathcal{O}}}(\omega)$ est s.c.s

et donc la multiapplication

$\omega \dashrightarrow [\tilde{\zeta}_{\mathcal{O}}(\omega), \tilde{\zeta}_{\bar{\mathcal{O}}}(\omega)]$ est s.c.s

démonstration

1) $\omega \dashrightarrow \tilde{\zeta}_{\mathcal{O}}(\omega)$ est S.c.i

L'application $\Psi:(x,t) \dashrightarrow t$ est continue

La multiapplication $\Gamma:\Omega \dashrightarrow R^m \times [0,T]$

$$\omega \dashrightarrow \{t,x \mid x\in[\omega(t^-),\omega(t)]\} \cap C_{\mathcal{O}}\times[0,T]$$

est s.c.s comme multiapplication ,définie par l'intersection de deux multiapplications s.c.s

$$\tilde{\zeta}_{\mathcal{O}}(\omega)=\inf_{(x,t)\in\Gamma(\omega)} \Psi(x,t) \quad \text{est donc s.c.i}$$

2) $\omega \dashrightarrow \tilde{\zeta}_{\bar{\mathcal{O}}}(\omega)$ est s.c.s

En effet la multiapplication

$\bar{\Gamma}: \omega \dashrightarrow \{s,x \mid x\in[\omega(s^-),\omega(s)]\}$ est continue en effet

$\omega_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \omega$ au sens de la topologie de Skorohod $\bar{\Gamma}(\omega_n) \dashrightarrow \bar{\Gamma}(\omega)$

au sens de la topologie de Hausdorff pour des compacts.

Montrons alors $\tilde{\zeta}_{\bar{\delta}}(\omega)$ est s.c.s

Soit $t \geq \tilde{\zeta}_{\bar{\delta}}(\omega) \Rightarrow \Gamma(\omega) \cap R^m x[0,t] \cap C_{\bar{\delta}} x[0,t] \neq \emptyset$

$\omega_n \dashrightarrow \omega$, $C_{\bar{\delta}}$ étant ouvert, Γ étant continue, $\exists N: \quad \forall n \geq N$

$\Gamma(\omega_n) \cap R^m x[0,t+\varepsilon] \cap C_{\bar{\delta}} x[0,t+\varepsilon] \neq \emptyset \qquad t+\varepsilon \geq \lim_n \sup \tilde{\zeta}_{\bar{\delta}}(\omega_n)$

c.q.f.d

Lemme 3.3

Si f est s.c.i

$$g(\omega) = \inf_{t \in [\tilde{\zeta}_{\delta}(\omega), \tilde{\zeta}_{\bar{\delta}}(\omega)]} \ \inf_{x \in [\omega_{t^-}, \omega_t]} f(t,x)$$

est s.c.i

démonstration

f est s.c.i

$\Gamma: (t,\omega) \dashrightarrow [\omega_{t^-}, \omega_t]$ est s.c.s

et donc

$$\psi(t,\omega) = \operatorname{Inf}_{x \in [\omega_{t^-}, \omega_t]} f(t,x) \text{ est s.c.i}$$

La multiapplication

$T: \omega \dashrightarrow [\tilde{\zeta}_{\delta}(\omega), \tilde{\zeta}_{\bar{\delta}}(\omega)]$ est s.c.s

et donc $g(\omega)$ est s.c.i.

On peut énoncer maintenant le

Théorème 3.2

(3.5) Le problème $\displaystyle \operatorname{Min}_{P \in \mathcal{P}(y,C)} E^P \inf_{t \in [\tilde{\zeta}_{\delta}(\omega), \tilde{\zeta}_{\bar{\delta}}(\omega)]} \ \inf_{x \in [\omega_{t^-}, \omega_t]} f(t,x)$

dans lequel $\tilde{\zeta}_{\delta}$ et $\tilde{\zeta}_{\bar{\delta}}$ sont définis par (3.3) et (3.4) admet une solution

Corollaire 3.1

Lorsque $\mathcal{P}(y,C)$ désigne l'ensemble des solutions du problème de martingale avec $C=C_1 \mathbb{1}_{\{\nu=0\}}$ avec C_1 à valeur dans $E_1 \times E_2$, $P\in\mathcal{P}(y,C)$ est à support sur les fonctions continues alors (3.5) s'énonce:

$$(3.6)\quad \underset{P\in\mathcal{P}(y,C)}{\mathrm{Min}}\ E^P \inf_{t\in[\zeta_\sigma(\omega),\zeta_{\bar\sigma}(\omega)]} f(t,X_t)$$

ζ_σ [resp. $\zeta_{\bar\sigma}$] désigne cette fois le temps de sortie de l'ouvert [resp. du fermé] au sens classique ,et

(3.6) admet une solution.

Corollaire 3.2

Si $t \dashrightarrow f(t,X_t)$ est P p.s croissante $\forall P\in\mathcal{P}(y,C)$ alors

$$(3.7)\quad \underset{P\in\mathcal{P}(y,C)}{\mathrm{Min}}\ E^P f(\zeta_\sigma, X_{\zeta_\sigma})$$

admet une solution où ζ_σ désigne le temps de sortie de l'ouvert au sens classique

démonstration

$$\mathop{\mathrm{Inf}}_{t\in[\tilde\zeta_\sigma,\tilde\zeta_{\bar\sigma}]}\ \inf_{x\in[\omega_{t^-},\omega_t]} f(t,x)= f(\zeta_\sigma, X_{\zeta_\sigma})$$

Remarque

Ce dernier corollaire est intéressant car les problèmes qui ont dans la formulation initiale ,seulement un coût intégral $\int_0^{\zeta_\sigma} h\,ds$ $h\geq 0$ entrent dans le cadre de celui ci

En effet $\int_0^t h\,ds$ verifie la propriété car les pts de discontinuite sont $P\times dt$ négligeables.

3.3) Caractérisation de la solution optimale discrétisation en temps

Définition d'un problème de contrôle optimal approché

Considérons la multiapplication

$(s,x) \dashrightarrow C_{h,\varepsilon}(s,x)$

$$C_{h,\varepsilon}(s,x)=\overline{C^o}\{\bigcup_{\substack{s\leqslant t\leqslant s+h \\ |y-x|\leqslant\varepsilon}} C(t,y)\}$$

Lemme 3.4

$C_{h,\varepsilon}(s,x)$ est une multiapplication s.c.s convergeant ponctuellement en décroissant vers la multiapplication $C(s,x)$ lorsque $h\downarrow o$, $\varepsilon\downarrow o$

Démonstration

1) $C_{h,\varepsilon}(s,x)$ est s.c.s

Il suffit de montrer que $C_{h,\varepsilon}(s,x)$ est de graphe fermé c.a.d. soit $(s_n,x_n,c_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}(s,x,c)$ $c_n\in C_{h,\varepsilon}(s_n,x_n)$ montrons que $c\in C_{h,\varepsilon}(s,x)$ montrons le par l'absurbe

Supposons que $c\notin C_{h,\varepsilon}(s,x)$; $C_{h,\varepsilon}(s\ ,x\ )$ étant convexe compact, c étant compact il existe un hyperplan noté ρ séparant c de $C_{h,\varepsilon}(s,x)$ c.a.d

$$(\rho,c)\geqslant \sup_{\tilde{c}\in C_{h,\varepsilon}(s,x)}(\rho,\tilde{c})+\varepsilon_1 \quad \varepsilon_1>o$$

$c_n\dashrightarrow c$ $\forall\varepsilon_2$ $\exists N$: $\forall n\geqslant N$ on ait $|(\rho,c_n)-(\rho,c)|\leqslant\varepsilon_2$

et donc

$$(3.8)\qquad \forall n\geqslant N(\tfrac{\varepsilon_1}{2})\qquad (\rho,c_n)\geqslant \sup_{\tilde{c}\in C_{h,\varepsilon}(s,x)}(\rho,\tilde{c})+\frac{\varepsilon_1}{2}$$

$c_n \in C_{h,\varepsilon}(s_n, x_n)$

et donc

(3.9) $\quad (\rho, c_n) \leqslant \sup\limits_{\tilde{c} \in C_{h,\varepsilon}(s_n,x_n)} (\rho, \tilde{c})$

La définition de $C_{h,\varepsilon}(s_n, x_n)$ entraine alors

$\exists\, c'_n \in C(s'_n, x'_n) \quad |s'_n - s_n| \leqslant h \quad |x'_n - x_n| \leqslant \varepsilon$ vérifiant $\quad (\rho, c'_n) \geqslant (\rho, c_n) - \varepsilon_1/4$

Considérons alors lasuite (s'_n, x'_n, c'_n)appartient à un compact et donc il existe une sous suite ,encore indéxée par n ,convergente:

(3.10) $\quad s'_n \xrightarrow[n \to \infty]{} s^* \qquad |s - s^*| \leqslant h$

$x'_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x^* \qquad |x - x^*| \leqslant \varepsilon$

$c'_n \xrightarrow[n \to \infty]{} c^*$

et donc grâce à la s.c.s de C $\; c^* \in C(s^*, x^*)$.(3.8) et (3.9)$\Rightarrow$

$(c^*, \rho) \geqslant \sup\limits_{\tilde{c} \in C_{h,\varepsilon}(s,x)} (\rho, \tilde{c}) + \frac{\varepsilon_1}{4}$

or (3.10)

$c^* \in C_{h,\varepsilon}(s,x)$ d'où la contradiction.

Montrons que $\bigcap\limits_{h,\varepsilon} C_{h,\varepsilon}(s,x) = C(s,x)$

En effet s'il en était autrement ,il existerait

$c \in \bigcap\limits_{h,\varepsilon} C_{h,\varepsilon}(s,x)$

$c \notin C(s,x)$

donc il existerait un hyperplan ρ :

$(\rho, c) \geqslant \sup\limits_{\tilde{c} \in C(s,x)} (\rho, \tilde{c}) + \varepsilon_1$ $\quad$ C étant s.c.s à valeur convexe.

$c \in \bigcap_{h,\varepsilon} C_{h,\varepsilon}(s,x)$ donc appartient $C_{h_o,\varepsilon_o}(s,x)$ on a alors

$$(\rho,c) \leq \sup_{\tilde{c} \in C_{h_o,\varepsilon_o}(s,x)} (\rho,\tilde{c})$$

et grâce à la définition de $C_{h_o,\varepsilon_o}(s,x)$ $\quad \exists\, c' \in C(s',x')$

$|s'-s| \leq h_o$

$|x'-x| \leq \varepsilon_o$

$$\sup_{c \in C_{h_o,\varepsilon_o}(s,x)} (c,\rho) \leq (c',\rho)+\frac{\varepsilon_1}{2}$$

$s' \dashrightarrow s$

$x' \dashrightarrow x$ $\qquad$ quand $h_o,\varepsilon_o \dashrightarrow o$

$c' \dashrightarrow c^* \in C(s,x)$ grâce à la s.c.s de C

et donc

$$-\frac{\varepsilon_1}{2}+(c^*,\rho) \geq \sup_{c \in C(s,x)} (\rho,c) \text{ or } c^* \in C(s,x) \text{ d'où la contradiction} \blacksquare$$

Considérons alors la multiapplication

$$C_n=\left[C_{\frac{1}{n},\frac{1}{n^\gamma}} + \mathcal{V}\left(o,\frac{kn^{2\gamma}}{n}\right)\right] \cap E \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2}>\gamma$$

où $\mathcal{V}\left(o,\frac{kn^{2\gamma}}{n}\right)$ désigne un voisinage fort de o dans $R^{m+m \times m} \times \mathcal{M}_+^b(R^m)$ de rayon $\frac{kn^{2\gamma}}{n}$.

On a alors $\bigcap_n C_n(s,x)=C(s,x)$ grâce au lemme 3.4 et le fait que $\mathcal{V}\left(o,\frac{kn^{2\gamma}}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\dashrightarrow} o$

Considérons alors la multiapplication que nous noterons Π^n

$$\Pi^n:(s,x) \dashrightarrow \Pi^{n,C_n,\rho,3,2}(s,x) \text{ avec } \rho(M,M_1,M_2,M_3).$$

C_n étant s.c.s Π^n est s.c.s d'aprés la proposition 1.1

Considérons alors le problème de programmation dynamique

$$(3.11)\begin{cases} V_n(T,x)=f(T,x) \quad \text{avec } f(T,\ .) \text{ s.c.i.} \\ V_n((n-1)h,x)=\underset{\pi\in\Pi^n((n-1)h,x)}{\mathrm{Min}} \displaystyle\int V_n(T,y)\pi(dy) \\ \vdots \\ V_n(o,x)=\underset{\pi\in\Pi^n(o,x)}{\mathrm{Min}} \displaystyle\int V_n(h,y)\pi(dy) \end{cases}$$

Théorème 3.3

Le problème (3.10) admet une solution de plus $V(ih,x)$ est s.c.i $\forall$ i

démonstration

On le démontre par récurrence

L'application

$\pi \dashrightarrow \int V_n(T,y)\pi(dy)$ est s.c.i car f est s.c.i

$\Pi^n((n-1)h,x)$ est à valeur compacte car elle est s.c.s.

et donc $\underset{\pi\in\Pi^n((n-1)h,x)}{\mathrm{Min}} \int V_n(T,y)\pi(dy)$ existe et $V(T-h,x)$ est s.c.i grâce au th. du maximum de Berge[2].

Il existe $\pi_n^*(ih,x)$, borelienne en x, réalisant le minimum.

A π_n^* associons $P^n_{\pi_n^*}$ par la méthode exposée en 1.3

$P^n_{\pi_n^*}$ est étroitement relativement compacte grâce à la proposition 1.2

Par la méthode exposée dans la démonstration d'une solution au problème de martingale on obtient que toute sous suite convergente de $P^n_{\pi_n^*} \to P\in\mathcal{P}(K,C)$.

On a alors le

Théorème 3.4

Si $\{P^n_{\pi^*_n}\}$ désigne la suite de mesure sur Ω, définie par interpollation constante par morceaux c.a.d.l.a.g. sur la chaine de markov π^*_n solution du problème de commande discrétisé (3.11). $\{P^n_{\pi^*_n}\}$ est étroitement relativement compacte. Tout point P^* adhérent à $\{P^n_{\pi^*_n}\}$ appartient à $\mathcal{P}(y,C)$ et est solution du problème de commande optimal

$$(3.12) \quad \underset{P\in\mathcal{P}(y,C)}{\mathrm{Min}} \; E^P f(T,X_T)$$

démonstration

On a démontré l'admissibilité de P^* démontrons son optimalité pour cela soient:

$\tilde{P}$ une commande optimale de (3.11) (existant grâce au th 3.1)

$\tilde{V}$ son cout optimal.

Considérons la loi du vecteur $(X_o, X_h, X_{2h}, \dots X_{(n-1)h})$ sous $\tilde{P}$ elle peut s'écrire

$$\delta_y \pi^o_y(dx_1)\pi^1_{y,x_1}(dx_2) \cdots \pi^{n-2}_{y,x_1,\; x_{n-2}}(dx_{n-1})$$

Grâce au lemme (2.4) (2.5) et à la définition de C_n on a:

$$\pi^i_{y,x_1,\; \dots\; x_i} \in \Pi^n_{ih}(ih,x_i)$$

et donc $V_n(o,y) \leq \tilde{V}, \forall n$

Or

$V_n(o,y) = E_{P^n_{\pi^*_n}} f(T,X_T)$ f étant s.c.i. on a

$\tilde{V} \geq \liminf V_n(o,y) \geq E_{P^*} f(T,X_T)$ c.q.f.d.

3.4) Caractérisation d'une commande optimale (Discrétisation en temps et en espace)

Fonctions d'appui de $C(s,x)$

$C(s,x)$ est un convexe fermé de $R^q \times \mathcal{M}_+^b(R^m)$, Notons φ un élément appartenant à $R^q \times \mathcal{C}^b(R^m)$. $\alpha(\varphi;s,x)$ fonction d'appui de $C(s,x)$ est définie par:

$$\alpha(\varphi;s,x)=\sup_{c\in C(s,x)} (c,\varphi)$$

On a alors :

$$C(s,x)=\left\{c : \sup_{\varphi}\{(c,\varphi)-\alpha(\varphi;s,x)\}\leqslant 0\right\}$$

Si l'on note

$$\tilde{C}(s,x)=\left\{c ; \sup_{\varphi}\{(c,\varphi)-\alpha(\varphi;s,x)\}\leqslant 0\right\}$$

où cette fois φ est un élément de $R^q \times SCI^b(R^m)$ (fonctions s.c.i bornées)

On a :

Lemme 3.5

$\tilde{C}(s,x)$ est un convexe fermé $=C(s,x)$

Démonstration

1) $\tilde{C}(s,x)\subset C(s,x)$ est évident

2) La convexité est immédiate

3) Il est fermé

Soit $c_n\in\tilde{C}(s,x)$, $c_n \dashrightarrow c$ dans $R^q \times \mathcal{M}_+^b(R^m)$.

On a :

$$(c_n,\varphi)\leqslant\alpha(\varphi;s,x) \quad ,\forall\varphi ,\forall n,$$

φ étant s.c.i. grâce à Delacherie Meyer [12]

$$\liminf_{n\to\infty} (c_n,\varphi)\geqslant(c,\varphi) ,$$

d'où

$(c,\varphi)\leqslant\alpha(\varphi;s,x)\quad\forall\varphi\in SCI^b\qquad$ c.q.f.d.

4) $\tilde{C}(s,x)\supset C(s,x)$

S'il en était autrement il existerait $\tilde{c}\in\tilde{C}(s,x),\ \tilde{c}\notin C(s,x)$.

$C(s,x)$ étant un convexe fermé, $\tilde{c}$ un compact convexe fermé, il existe un hyperplan (Hahn Banach) séparant $\tilde{c}$ et $C(s,x)$

donc il existe $\varphi\in R^q\times\mathcal{C}^b$

$(\varphi,\tilde{c})>\beta$

$(\varphi,c)\leqslant\beta\ \forall c\in C(s,x)$

La définition de $C(s,x)$ entraine alors que

$\beta\geqslant\alpha(\varphi;s,x)$, on a donc:

$(\varphi,\tilde{c})>\alpha(\varphi;s,x)$ ce qui est en contradiction avec le fait que $\tilde{c}\in\tilde{C}(s,x)$.

Notons $\bar{C}$ translaté de C la multiapplication

$(s,x)\dashrightarrow\{c=(b,a,T_x\pi)\ \ (b,a,\pi)\in C(s,x)\}$

où T_x désigne la translation de x.

$\bar{C}(s,x)$ est alors s.c.s car C l'est.

Notons $\bar{\alpha}(f;s,x)$ la fonction d'appui de $\bar{C}$ où $f\in\mathbb{R}^q\times\mathcal{C}^b$

Notons alors

$\alpha_{h,\varepsilon,k}(f;s,x)$ la régularisée s.c.s. de

$$(s,x)\dashrightarrow\sup_{\substack{ih\leqslant t\leqslant(i+1)h\\-\varepsilon+ik\leqslant y\leqslant(i+1)k+\varepsilon}}\bar{\alpha}(f;s,x)\quad\text{pour}\quad s\in]ih,(i+1)h[\ ,\ x\in]ik,(i+1)k[$$

Soit alors $C_{h,\varepsilon,k}$ la multiapplication

$$(s,x) \dashrightarrow \left\{c\in R^q\times \mathcal{M}_+^b(R^m) \;\middle|\; \sup_{f\in F_k} (c,f)-\alpha_{h,\varepsilon,k}(f;s,x)\right\}\cap E$$

où F_k désigne $R^q\times\phi_k$; avec ϕ_k l'ensemble des fonctions constantes par morceaux sur les pavés $A_i=\prod_{j=1}^{m}]i_jk,(i_j+1)k[$

Lemme 3.6

La multiapplication $C_{h,\varepsilon,k}$ est une multiapplication s.c.s à valeur convexe vérifiant:

$$\bigcap_{\substack{h>0\\ \varepsilon>0\\ k>0}} C_{h,\varepsilon,k}(s,x)=\bar{C}(s,x)$$

Démonstration

1) Elle est de graphe fermé

Soit $(s_n,x_n,c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (s,x,c)$, $c_n\in C_{h,\varepsilon,k}(s,x)$

montrons que $c\in C_{h,\varepsilon,k}(s,x)$

On a

$(c_n,\varphi)\leqslant\alpha_{h,\varepsilon,k}(\varphi;s_n,x_n) \quad \forall\varphi\in F_k$

$\liminf_n (c_n,\varphi)\geqslant(c,\varphi)$ car φ est s.c.i.

$\limsup_n \alpha_{h,\varepsilon,k}(\varphi;s_n,x_n)\leqslant\alpha_{h,\varepsilon,k}(\varphi;s,x)$ car l'application $(s,x) \dashrightarrow \alpha_{h,\varepsilon,k}(\varphi;s,x)$ est s.c.s.

d'où

$(c,\varphi)\leqslant\alpha_{h,\varepsilon,k}(\varphi;s,x) \Rightarrow c\in C_{h,\varepsilon,k}(s,x)$ c.q.f.d.

2) La convexité est immédiate ,le fait qu'elle soit à valeurs compactes se vérifie en utilisant des fonctions $f_k=\prod_j 1_{]\ell,\infty)}\times z \quad z\in R^q$.

3) Grâce au lemme 3.5 il est clair que

$$\bigcap_{h,k,\varepsilon} C_{h,\varepsilon,k}(s,x) \supset \overline{C}(s,x)$$

4) $$\overline{C}(s,x) \supset \bigcap_{h,\varepsilon,k} C_{h,\varepsilon,k}(s,x)$$

S'il en était autrement on aurait

$\tilde{c} \in \bigcap_{h,\varepsilon,k} C_{h,\varepsilon,k}(s,x)$ $\quad \tilde{c} \notin C(s,x)$,d'aprés Hahn Banach il existerait un hyperplan séparant $C(s,x)$ et $\tilde{c}$ et donc $\exists f \in R^q \times \mathcal{C}^b(R^m)$ vérifiant

$$(f,\tilde{c}) > \sup_{c \in \overline{C}(s,x)} (f,c)$$

$\overline{C}$ étant un convexe fermé et $\overline{\alpha}(f;s,x)$ étant sa fonction d'appui on a

(3.12) $\quad (f,\tilde{c}) > \overline{\alpha}(f;s,x)$

Prenons alors une suite $f_k \dashrightarrow f$ uniformément sur tout compact, f étant continue

$$(f_k,\tilde{c}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (f,\tilde{c})$$

D'autre part

$$\alpha_{h,\varepsilon,k}(f_k;s,x) \leqslant \sup_{\substack{t \\ y \\ |t-s|\leqslant h \\ |x-y|\leqslant k+\varepsilon}} \alpha(f_k;t,y)$$

On a également

$$|\alpha(f_k;t,y)-\alpha(f;t,y)| = \left| \sup_{c\in\overline{C}(s,x)} (c,f_k) - \sup_{c\in C(s,x)} (c,f) \right|$$

$$\leqslant k_1 (\sup_{|x|\leqslant d} |f_k(x)-f(x)| + \sup_{\pi} \pi\{|x| \geqslant d\}$$

$$(b,a,\pi) \in \bigcup_{\substack{|t-s|\leqslant h \\ |x-y|\leqslant k+\varepsilon}} \overline{C}(t,y)$$

Et donc grâce au propriétés de compacité de $\overline{C}(t,y)$ et de convergence uniforme de $f_k \dashrightarrow f$ on obtient :

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists k_0(\varepsilon_1) \quad \forall \; k < k_0(\varepsilon_1) \quad \sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ |x-y| \leq k+\varepsilon}} |\alpha(f_k;t,y) - \alpha(f;t,y)| \leq \varepsilon_1$$

En utilisant enfin la s.c.s de

$(t,y) \dashrightarrow \bar{\alpha}(f;t,y)$ on obtient

$(f,\tilde{c}) \leq \bar{\alpha}(f;t,y)$ d'où la contradiction avec (3.12) ∎

Notons

$r_k y = \left[\frac{y}{k}\right]k + \frac{k}{2}$ où $[\;]$ désigne la partie entière

Soit $\pi \in \mathcal{M}_+^b(R^m)$ le lemme suivant est alors évident

lemme 3.7

$$\forall k \leq k_1$$

$$(3.13) \quad \exists b_1 \int |y-x|^3 \pi(dy) \leq b_1 \Longleftrightarrow \exists b_2 \int |r_k y - r_k x|^3 \pi(dy) \leq b_2$$

avec $\frac{b_1}{b_2} + \frac{b_2}{b_1} \leq$ cte dépendant que de b et de k_1

Si (3.13) est vérifiée on a

$$\int (y-x)\pi(dy) - \int (r_k y - r_k x)\pi(dy) \leq k$$

$$\int (y-x)^{\otimes 2}\pi(dy) - \int (r_k y - r_k x)^{\otimes 2}\pi(dy) \leq d_1(b,b_1)k$$

Considérons alors

$$\overline{C}_n = \left(C_{h_n,\varepsilon_n,k_n} + \Gamma\left(0, \xi\left(\frac{h_n}{\varepsilon_n^2} + \frac{k_n}{h_n}\right)\right)\right) \cap E$$

avec $h_n = \frac{1}{n}$; $\varepsilon_n = \left(\frac{1}{n}\right)^\gamma$ $\gamma < \frac{1}{2}$; $k_n = \frac{1}{n^{\theta-1}}$ $\theta > 1$; ξ une cte

suffisamment grande.

On a:

$\bigcap_n \bar{C}_n(s,x)=C(s,x)$ grâce au lemme 3.6

Notons également

$C_n=(C_{h_n,\varepsilon_n}+\nabla(o,\xi\frac{h_n}{\varepsilon_n^2}))\cap E$

Notons alors $\bar{\Pi}^{n,\bar{C}_n}$ la multiapplication

$$\bar{\Pi}^{n,\bar{C}_n}:(s,x) \dashrightarrow \{\pi\in\mathcal{M}_+^1(R^m)\ ,\ \pi=\pi_1+\pi_2\ ,\pi_1\geq o\ ;\pi_2\geq o\ ;$$
$$\int|r_k y-r_k x|^{\bar{\alpha}}\pi_1(dy)\leq \bar{\rho}\ h_n^{\bar{\alpha}}\quad ;\ \bar{\alpha}>1;$$
$$(\int(r_k y-r_k x)\pi_1(dy),\int(r_k y-r_k x)^{\otimes 2}\pi_1(dy)\ ,\pi_2(dy))\in\bar{C}_n(s,x)\}$$

$$\Pi^{n,C_n}:(s,x) \dashrightarrow \{\pi\in\mathcal{M}_+^1(R^m)\ ,\pi=\pi_1+\pi_2,\pi_1\geq o\ ,\pi_2\geq o\ ,$$
$$\int|y-x|^3\pi_1(dy)\leq\rho\ h_n^{\alpha}\ ;$$
$$(\int(y-x)\pi_1(dy),\int(y-x)^{\otimes 2}\pi_1(dy),\pi_2^x(dy))\in C_n(s,x)\}$$

Il est clair grâce au lemme 3.7 que si $\pi\in\Pi^{n,C_n}\Rightarrow x\in\bar{\Pi}^{n,\bar{C}_n}$

D'autre part si $\pi\in\bar{\Pi}^{n,\bar{C}_n}\Rightarrow\pi\in\Pi^{n,\tilde{C}_n}$ avec

$\tilde{C}_n=(C_n+\nabla(o,\xi\frac{k_n}{h_n}))\cap E$

Et grâce au lemme 3.6 on a

(3.14) $\bigcap_n\tilde{C}_n(s,x)=C(s,x)$

Soit alors ϕ_n s.c.i. constante par morceaux $\phi_n\uparrow\phi$ où ϕ_n est la régularisée s.c.i. de $\sum_i\phi_n^i\chi_{A_i}(x)$ où χ_{A_i} désigne la fonction caractéristique de l' ensemble A_i.

Considérons alors le problème de programmation dynamique

$$(3.15)\begin{cases} V_n(T,x)=\phi_n(T,x) \\ \vdots \\ V_n(ih,x)=\underset{\pi\in\overline{\Pi}^{n,\overline{C}_n}(ih,x)}{\mathrm{Min}} \int V_n((i+1)h,y)\pi(dy) \\ \vdots \end{cases}$$

On a alors le théorème

<u>Théorème 3.5</u>

<u>Le problème (3.15) admet une solution ,de plus $V_n(ih,x)$ est s.c.i. constante par morceaux.</u>

<u>démonstration</u>

On procède par récurrence.

L'application $\pi \longrightarrow \int V_n(T,y)\pi(dy)$ est s.c.i car ϕ_n est s.c.i.

$\overline{\Pi}^{n,\overline{C}_n}((n-1)h,x)$ est s.c.s. et donc $\underset{\pi\in\overline{\Pi}^{n,\overline{C}_n}((n-1)h,x)}{\mathrm{Min}} \int V_n(T,y)\pi(dy)$

existe et $V_n(T-h,x)$ est s.c.i. grâce au théorème du maximum de Berge [2]

$V_n(T-h,x)$ est constante par morceaux car x------$\overline{\Pi}^n(T-h,x)$ l'est.

Il existe donc π_n^* ,borélienne en x, constante par morceaux réalisant le minimum.

A π_n^* associons $P^n_{\pi_n^*}$ par la méthode exposée en 1.3

$P^n_{\pi_n^*}$ est étroitement relativement compacte grâce à la proposition 1.2 et au lemme 3.7

Par la méthode exposée dans le th. d'existence en remplacant C par $\tilde{C}_n$ on obtient que toute sous suite convergente de $P^n_{\pi^*_n}$ converge vers $P\in\mathcal{S}(K,C)$ grâce à (3.14)

Théorème 3.6. Caractérisation d'une commande optimale, discrétisation en temps et en espace

Si $P^n_{\pi^*_n}$ désigne la suite de mesure sur Ω définie par interpolation constante par morceaux, sur la chaine de Markov solution du problème (3.15) alors $\{P^n_{\pi^*_n}\}$ est étroitement relativement compacte et tout point adhérent est solution du problème de commande optimale (3.1).

Démonstration

Si P^* désigne un point adhérent à $\{P^n_{\pi^*_n}\}$ on a démontré l'admissibilité de P^* $(P^*\in\mathcal{S}(K,C))$ il reste à montrer son optimalité.

Si $\tilde{P}$ désigne une commande optimale du problème (3.1) la loi du vecteur $X_o, X_h, \dots\dots X_{nh}$ peut s'écrire $\delta_y(dx_o)\pi^o_{x_o}(dx_1)\dots\pi^{n-1}_{x_o\dots x_{n-1}}(dx_n)$

et grâce à la définition de $\tilde{C}_n$ on a $\pi^i_{x_o\dots\dots x_i}\in\bar{\Pi}^{n,\tilde{C}_n}(ih,x_i)$ et donc en notant $P^n=P^n_{\pi^*_n}$, on a:

$$E^{P_n}\phi_n=V_n(o,y)\leqslant E^{\tilde{P}}\phi_n\leqslant E^{\tilde{P}}\phi \quad \text{car } \phi_n\leqslant\phi$$

Grâce au lemme (1.7) on a:

$$E^{P^*}\phi\leqslant \liminf E^{P_n}\phi_n\leqslant E^{\tilde{P}}\phi$$

Et donc P est optimal c.q.f.d.

3.5) Sur la résolution numérique du problème (3.15)

Nous avons vu que $\pi^{n*}_{s,x}(dy)$ solution de (3.15) est constant par morceaux en x et y.

Notons alors, avec A^n_j [resp A^ℓ_j] les ensembles sur lesquels ϕ^n [resp $C_{h,\varepsilon,k}(\ell h)$] est cte, $\ell<n$:

$p^i_{j,j'}=\bar{P}^n_{\pi^*_n}(X_{(i+1)h}\in A^{i+1}_{j'}|X_{ih}\in A^i_j)$

où $\bar{P}^n_{\pi^*_n}$ désigne la loi de probabilité construite sur $R^{(n+1)m}$ à partir de π^*_n comme en 1.3.

Notons $\bar{V}^i_{n,j}$ le coût optimal sur A_j à l'instant ih.

(3.15) se réécrit:

$$
(3.16)\quad\left\{\begin{array}{l}
\bar{V}^n_{n,j}=\phi_{n,j}\\
\vdots\\
\bar{V}^{i-1}_{n,j}=\underset{p}{\mathrm{Min}}\sum_{j'}p_{j'}\bar{V}^i_{n,j'}\\
\text{sous les contraintes:}\\
p_{j'}=q^1_{j'}+q^2_{j'}\ ;\ \sum p_{j'}=1\ ;\\
q^1_{j'}\geq 0;\\
q^2_{j'}\geq 0;\\
\left(\sum_{j'}q^1_{j'}(j'-j),\sum_{j'}q^1_{j'}(j'-j)^{\otimes 2},q^2\right)\in\bar{C}^n_{i,j}\frac{1}{n}\ ;\\
\sum_{j'}q^1_{j'}|j'-j|^3\leq\rho\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha\\
\vdots\\
\bar{V}^0_{n,j}=\underset{p}{\mathrm{Min}}\sum_{j'}p_{j'}\bar{V}^1_{n,j'}
\end{array}\right.
$$

Le résultat de l'optimisation sera $p^{*i}_{j,j'}$

Chaque étape de la récurrence (3.16) est un problème de programmation mathématique dans R^q avec $q=\mathrm{card}\{j\}$

Bibliographie

[1] A.Bensoussan J.L.Lions

Temps d'arrêt et contrôle impulsionnel à paraitre Hermann

[2] C.Berge Espace toplogique ,fonctions multivoques Dunod

[3] P.Billingsley Convergence of probability measures J.Willey

[4] J.M.Bismut Thèse Paris VI, 1973.

-Controle des processus de sauts C.R.A.S Novembre 75

[5] -Dualité convexe ,temps d'arrêt optimal et contrôle stochastique

Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie 38, 169-198 77

[7] N.Bourbaki Eléments de mathématique Intégration ch 9 Hermann

[8] P.M.Bremaud Livre à paraitre sur les processus ponctuels

[9] F.Brodeau Problème de contrôle stochastique à trajectoires discontinues IRIA control theory,Numerical methods and computer system modeling.Lecture notes in economics and mathematical science 107.Springer Verlag

[10] C.Castaing Sur les multiapplications mesurables RIRO n°1 67

[11] Colleter F.Delebecque F.Falgaronne J.P.Quadrat

Sur la gestion des moyens de production hydroelectriques de la nouvelle Caledonie

[12] C.Delacherie P.A.Meyer Probabilités et Potentiel Hermann 75

[13] I.Ekeland Thèse Paris 6

[14] W.H.Fleming R.Rishel Deterministic and stochastic optimal control Springer Verlag

[15] I.I.Gikhman A.V.Skorohod Introduction to the theory of random processes Addison Wesley Publishing Company 65

[16] J.Jacod J.Mémin Caractéristiques locales et continuité absolue pour les semi martingales Z.Wahrscheinchlichkeitstheorie 35,1-37 (76)

[17] J.Jacod M.Yor Etude des solutions extremales et représentation intégrales des solutions pour certain problèmes de martingale Z.Wahrscheinchlichkeitstheorie 38, 83-125 (77)

[18] H.Kushner G.Dimasi

Approximations for functionnals and optimal contol problems on jump diffusion processes Rapport Brown University

[19] H.Kushner Probability methods for approximations in stochastic control and for elliptic equations Academic Press 77

[20] Krilov On control of the solution of Stochastic Integral Equation with Degeneration.

IZV Akad Nauk, USSR. Sec. Mat., Tom 36,72 n°1.

[21] J.P.Lepeltier B.Marchal

-Sur l'existence de politiques optimales dans le controle intégrodifferentiel An.Inst.H.Poincarré vol 13 n°1 77 p.45-97

[22] -Problèmesde martingales et équations différentielles stochastiques associées à un opérateur intégrodifférentiel AN.Inst.H.Poincarré vol.12 (76) p.43-105

[23] J.Neveu Bases mathématiques du calcul des probabilités Masson 64

[24] J.P.Quadrat -Controle optimal de diffusion stochastique C.R.A.S. T.284 (77)

[25] -Existence de solution et algorithme de résolution numérique de problème de commande de diffusion stochastique dégénérée SIAM Journal of control Mars 1980

[26] R.Sentis -Equation de Bellman pour un problème de commande optimal stochastique éventuellement dégénéré Cahier des mathématiques de la décision Paris 9 (77)

[27] -Discrétisation d'un problème de controle déterministe Cahier des Mathématiques de la décision Paris 9 (77)

[28] D.W.Stroock Z.Wahrscheinlichkeitstheorie 32 75 p.209 244 Diffusion processes associated with Levy generators

[29] A.V. Skorohod Studies in the theory of random processes Addison Wesley 65

[30] D.W.Strook S.R.S Varadhan

-Diffusion with continuous coefficients I and II Com. on pure and applied math. 67

[31] -Diffusion with boundary conditions Com.on pure and applied math. 71

[32] M.Valadier Thèse Montpellier 70

[33] L.C.Young Lectures on the calculus of variations and optimal control theory Saunders -69

[34] P.L.Lions Thèse Paris 1979

[35] M. Métivier : Stochastic Integration, Rap 44, Ecole Polytechnique, 1979.

[36] M. Métivier : Sufficient conditions of tightness and weak convergence of a saquence of processes, Internal Report, Univ. of Minnesota, 1979.

[37] V. Barbu : Convexity and Optimization in Banach Space Sijthoff et Noordhoff International Publishers, Bucarest, 1978.

[38] N. El Karoui : Controle stochastique Ecole de St Flour de Pro. 79 Springer Verlag

[39] J. Jacod : Calcul Stochastic et Problèmes de Martingales, Springer Verlag, 1979.

[40] J.L. MENALDI : Thèse à paraître, Paris.

[41] D.W. STROOCK ; S.R.S. VARADHAN : Multidimensional Diffusion Processes Springer Verlag, 1979.