ANALYSE NUMÉRIQUE D'INÉQUATIONS ASSOCIÉES A DES PROBLEMES DE TEMPS D'ARRÊT OPTIMAUX EN CONTRÔLE STOCHASTIQUE

M. Goursat, J.P. Quadrat
IRIA/LABORIA

Résumé :

Nous nous intéressons ici au problème de contrôle stochastique suivant : contrôle continu et temps d'arrêt optimal pour une diffusion stochastique. Ce problème dans le cas stationnaire se ramène à la résolution d'une inéquation variationnelle elliptique non linéaire dont nous faisons l'analyse numérique. Nous construisons les problèmes approchés ; nous montrons la convergence de l'approximation et donnons une majoration de résolution dont nous montrons la convergence et donnons des résultats numériques sur un exemple-test.

Abstract :

The following stochastic problem is considered : continuous control and optimal stopping time for stochastic diffusions. In the stationary case the solution of this problem is obtained by solving a non linear elliptic varational inequality of which we study the numerical analysis. A finite elements method is used : we prove the convergence of the approximation and give a majorant for the error. Then we give an algorithm, prove its convergence and give numerical results for a test example.

INTRODUCTION

L'évolution de nombreux systèmes physiques ou économiques peut être modélisée par des processus stochastiques , dont certains paramètres (contrôles) sont à notre disposition.
Le problème de contrôle optimal consiste alors à choisir au mieux ces paramètres c.a.d. à minimiser l'espérance du ''cout'' de l'évolution du système,en général sur une période choisie à priori:l'horizon(fini ou infini).Dans certain cas l'horizon apparait comme un contrôle supplémentaire.
Exemples: -choix de remplacement d'un matériel en fonction de son degré d'usure;-temps d'arrêt de la saisie de donnée pour l'estimation d'un paramètre en fonction de sa qualité(intervalle de confiance);-arrêt dans un jeu en fonction des gains etc...

Les processus que nous considérons ici sont des diffusions stochastiques.Le cas du contrôle optimal sur une période fixée se ramène a la résolution d'une équation de Bellman;le cas du temps d'arrêt optimal(horizon à contrôler) à la résolution d'une inéquation variationnelle(I.V.)non linéaire.

De nombreux auteurs se sont intéréssés à ce problème par exemple SHIRIAEV [12], STRATANOVITCH [14], CHERNOF [4], BENSOUSSAN-FRIEDMAN [2], VAN MOERBEKE [15], BENSOUSSAN-LIONS [1]....

Nous nous intéréssons ici essentiellement à l'analyse numérique de ce problème dans le cas stationnaire. Le schéma d'approximation sera le suivant: éléments finis parallélépipédiques-constants par éléments pour le contrôle-linéaire par composante par élément pour la solution de l'I.V. On montre l'existence et l'unicité de la solution approchée, la convergence du schéma, et on donne une majoration d'erreur dans H^1. On présente un algorithme de résolution du problème approché. On prouve la convergence de cet algorithme. On donne quelques résultats numériques.

Le plan sera le suivant

Introduction

1) Position du problème

1.1 Le problème de contrôle stochastique

1.2 L'inéquation variationnelle à résoudre

2) Existence et unicité de la solution de l'I.V.

3) Approximation de l'I.V

3.1 Construction du problème approché

3.2 Convergence de l'approximation et majoration de l'erreur

4) Résolution numérique

4.1 Algorithme de résolution

4.2 Exemple et résultats numériques

1) Position du problème

1.1 Le problème de contrôle stochastique

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de R^n tel que $\mathcal{O}=\{x\in R^n ; \phi(x)>o\}$

de frontière $\Gamma=\{x\in R^n , \phi(x)=o\}$ où ϕ est une application

de R^n dans R de classe C^2 et telle que $|\nabla\phi|\geq 1$ sur Γ.

Considérons les fonctions suivantes:

- $\sigma : R^n \dashrightarrow R^{n^2}$ C^1 telle que $a=\frac{1}{2}\sigma\sigma^*$ soit coercif
  $x \qquad [\sigma_{ij}(x)]$

- $u : R^n \dashrightarrow R^m$ borélienne bornée

- $b : R^n x R^m \dashrightarrow R^n$ borélienne en x uniformément lipschitzienne
  $x \; u \qquad [b_i(x,u)]$
  en u, et bornée

On note γ le champ de vecteur $\gamma(x)=a.\nabla\phi(x)$

Soit alors $(\Omega,\mathcal{M}_t,\mathcal{M})$ l'espace probabilisable suivant

$\Omega=C(o,\infty;\bar{\mathcal{O}})$

$\mathcal{M}_t=\sigma(x(s) \;, s\leq t) \; x(.)\in\Omega$ et $\mathcal{M}=\mathcal{M}_\infty$

Les théorèmes 3.1 et 5.8 de Strook Varadhan[ ] montrent l'existence et l'unicité d'une mesure $P^U_{x,o}$ solution du problème de sous martingale $(a,b(u),\rho=0,\gamma)$ partant de x à l'instant o.

ρ désigne le temps passé à la frontière.

Remarque:

Le problème de sousmartingale signifie qu'il existe un brownien w et un processus continu croissant ξ (croissant strictement sur la frontière) tels que:

$$x_t - x - \int_0^t b(x_s)ds - \int_0^t \gamma(x_s)d\xi_s = \int_0^t \sigma(x_s)dw_s \qquad x_t \in \bar{\mathcal{O}} \qquad \blacksquare$$

Soit $\mathcal{S}$ un ouvert de $\bar{\mathcal{O}}$, τ le temps de sortie de $\mathcal{S}$.

$\tilde{\varphi}: R^n \times R^m \dashrightarrow R$ positive bornée, borélienne en x,
$\quad x \quad u \qquad \tilde{\varphi}(x,u) \stackrel{df}{=} \varphi(x,u) + f(x)$

lipschitzienne uniformément en u,

$f \geq 0 \in L^p(\mathcal{O})$.

$F: R^n \dashrightarrow R \quad W^{2,p}(\bar{\mathcal{O}})$ positive

$g: R^n \dashrightarrow R \quad g|_\Gamma \in W^{1-1/p,p}(\Gamma) \geq 0$

Le problème de contrôle à résoudre s'écrit:

$$(1.1) \qquad \underset{u \in \mathcal{U}}{\mathrm{Min}}\; E_{x,0}^{P^u} \int_0^\tau e^{-\lambda s}\tilde{\varphi}(x_s, u(x_s))ds + \int_0^\tau g(x_s)d\xi_s + e^{-\lambda\tau}F(x_\tau) \qquad \square$$

1.2 Conditions suffisantes d'optimalité: l'inéquation variationnelle I.V.

1.2.1 Présentation formelle

On considère le système d'inéquations suivant:

$$(1.2)\begin{cases}\sum_{ij} a_{ij}\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}-\lambda y+\underset{u\in\mathcal{U}(x)}{\mathrm{Min}}\left\{\sum^{i} b_i(x,u)\dfrac{\partial y}{\partial x_i}+\varphi(x,u)\right\}+f(x)\geqslant 0 \\ y(x)-F(x)\leqslant 0 \qquad\qquad \text{dans } \mathcal{O} \\ \left(\sum_{ij} a_{ij}\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}-\lambda y+\underset{u\in\mathcal{U}(x)}{\mathrm{Min}}\left\{\sum^{i} b_i(x,u)\dfrac{\partial y}{\partial x_i}+\varphi(x,u)\right\}+f(x)\right)(y(x)-F(x))=0\end{cases}$$

$$(1.3)\begin{cases}y(x)-F(x)\leqslant 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial \gamma}+g\geqslant 0 \qquad\qquad \text{sur } \Gamma \\ (y(x)-F(x))\left(\dfrac{\partial y}{\partial \gamma}+g\right)=0\end{cases}$$

En supposant qu'il existe y solution de (1.2),(1.3) de classe C^2 nous allons montrer que y donne la solution de(1.1)

Pour cela appliquons la formule d'Ito (cf.Strook Varadhan[13]) à $e^{-\lambda t}y(x)$ avec

$$(1.4)\quad u\in \underset{u\in\mathcal{U}(x)}{\mathrm{ArgMin}}\left(\sum_i b_i(x,u)\frac{\partial y}{\partial x_i}+\varphi(x,u)\right):$$

$$(1.5)\quad E^{x,0}\, e^{-\lambda\tau}y(x_\tau)-y(x)-E^{x,0}\int_0^\tau -\lambda e^{-\lambda s}y(x_s)+e^{-\lambda s}L(y)(x_s)\chi(\mathcal{O})ds - \int_0^\tau \frac{\partial y}{\partial \gamma}(x_s)d\xi_s=0$$

où $\chi(\mathcal{O})=\begin{cases}1 \text{ si } x_s\in\mathcal{O}\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

τ =temps de sortie de l'ouvert défini par :

(1.6) $\mathcal{Y} = \{x \in \mathcal{O} / L(y)(x) + f(x) = 0\} \cup \{x \in \Gamma / \frac{\partial y}{\partial \gamma} + g = 0\}$

L est l'opérateur

(1.7) $\sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \underset{u \in \mathcal{U}}{\mathrm{Min}} \left(\sum_i b_i(x,u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \varphi(x,u) \right) - \lambda I$

(1.4) et (1.5) entrainent que

$$y(x) = E^{x,o} \int_0^{\tau} e^{-\lambda s} \tilde{\varphi}(x_s, u(x_s)) ds + \int_0^{\tau} g(x_s) d\xi_s + e^{-\lambda \tau} F(x_\tau)$$

Si la diffusion est régie par un contrôle $\tilde{u}$ ne vérifiant pas (1.4) et si l'ouvert $\tilde{\mathcal{Y}}$ définissant le temps d'arrêt (maintenant $\tilde{\tau}$) est différent de $\mathcal{Y}$ alors la formule d'Ito (1.2) (1.3) entrainent

(1.8) $$y(x) \leq E^{x,o} \int_0^{\tilde{\tau}} e^{-\lambda s} \varphi(x_s, u(x_s)) ds + E^{x,o} \int_0^{\tilde{\tau}} g(x_s) d\xi_s + e^{-\lambda \tilde{\tau}} F(x_{\tilde{\tau}})$$

Q.E.D. ∎

Remarque:

L'hypothèse de régularité C^2 de y est trop restrictive

un lemme de Rishel [M] amélioré par Bensoussan Lions [1] montre qu' elle peut être affaiblie à $y \in W^{2,p}(\mathcal{O})$ p suffisamment grand.

1.2.2 Formulation précise de l'I.V. à résoudre

Soit $\mathcal{U}$ une multiapplication de graphe borélien, à valeurs fermées dans un compact fixe:

(1.9) $$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{\ \mathcal{U}\ } & R^m \\ x & & \mathcal{U}(x) \end{array}$$

on définit

(1.10) $$\begin{array}{lcl} \Pi : \mathcal{O} \times R^n & \longrightarrow & R \\ (x,w) & & \Pi(x,w) = \operatorname{Min}_{u \in \mathcal{U}(x)} \Psi(x,u,w) \end{array}$$ avec

(1.11) $$\Psi(x,u,w) = \sum_i b_i(x,u) w_i + \varphi(x,u)$$

On peut alors encore définir l'opérateur encore noté u

(1.12) $$\begin{array}{lcl} u : L^p(\mathcal{O};R^n) & \longrightarrow & L^p(\mathcal{O};R^m) \\ z & & x \longrightarrow u(x,z(x)) \end{array}$$ où

$$u(x,w) \in \operatorname{ArgMin}_{u \in \mathcal{U}(x)} \Psi(x,u,w)$$

On définit également l'opérateur encore noté

(1.13) $$\begin{array}{lcl} \Pi : L^p(\mathcal{O};R^n) & \text{---------} & L^p(\mathcal{O}) \\ z & & x \longrightarrow \Pi(x,z(x)) \end{array}$$

on peut en effet montrer les propriétes de mesurabilité pour définir correctement ces deux opérateurs cf.par ex.Quadrat [10]

On montre également que Π est lipschitzien.

(1.14) $\mathcal{U}$ désignera dorénavant: $\{u \in L^p(\mathcal{O};R^m) : u(x) \in \mathcal{U}(x) \text{ p.p.}\}$

Soit alors les espaces $V\subset H\subset V'$ avec $V=H^1(\mathcal{O})$ (ou $H_0^1(\mathcal{O})$)

$f\in L^2(\mathcal{O})\geqslant 0$

On définit la forme bilinéaire suivante $y,v\in V$

(1.15) $a_\lambda(y,v)=\int_{\mathcal{O}}\left(\sum_{ij} a_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\sum_j a_{ij,i}\frac{\partial y}{\partial x_j}v+ yv\right)dx$

avec $a_{ij,i}=\sum_i \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}$

et on suppose qu'$\exists\,\alpha>0$ et μ tels que

(1.16) $a_\lambda(y,y)\geqslant\alpha\|y\|^2+\mu|y|^2$ ($|\ |$ et $\|\ \|$ désignent resp. les normes dans H et V)

Remarquons que si (1.16) est vérifiée pour λ_0 il en est de même $\forall\ \lambda\geqslant\lambda_0$

On définit la forme linéaire:

(1.17) $l(v)=\int_{\mathcal{O}} fv\,dx+\int_\Gamma gv\,d\Gamma$

On note D l'opérateur gradient

(1.18) $y \dashrightarrow Dy=\left\{\frac{\partial y}{\partial x_i}\quad i=1\ldots\ldots n\right\}$

Le problème s'écrit: trouver $y\in V$ solution de

(1.19) $\begin{cases} y\leqslant F \\ a_\lambda(y,v-y)-(\Pi(Dy),v-y)-l(v-y)\geqslant 0\ \forall v\leqslant F\end{cases}$

Si $V=H^1(\mathcal{O})$ (1.19) est équivalent à (1. 2) (1. 3)

Si g=o on peut prendre $V=H_0^1(\mathcal{O})$, alors (1.19) est équivalent à

(1.20) $$\begin{cases} A_\lambda y - \Pi(Dy) - f \leq o \\ y - F \leq o \\ (A_\lambda y - \Pi(Dy) - f)(y-F) = o \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{O}$$

(1.21) $y=o$ sur Γ

avec A_λ défini par

(1.22) $$A_\lambda y = -\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} + \lambda y$$

<u>Remarque:</u>

La solution de (1.20) (1.21) donne la solution du problème de contrôle stochastique suivant (sous l'hypothèse $y \in W^{1,p}$):

$$dx_t = b(x_t, u(x_t))dt + \sigma(x_t)dw_t$$

$\mathcal{S}$ ouvert de R^n

$$\tau = \inf\{t;\ x_t \notin \mathcal{S}\}$$

$$\tau_1 = \inf\{t\ ;\ x_t \notin \mathcal{O}\}$$

$$y(x) = \underset{u \in \mathcal{U}_\tau}{\mathrm{Min}}\ E^{x,o}\left(\int_0^{\tau\wedge\tau_1} e^{-\lambda t}\tilde{\varphi}(x_t, u(x_t))dt + e^{-\lambda\tau} F(x_\tau)\chi_{\tau\leq\tau_1}\right)$$

$$\chi_{\tau\leq\tau_1}(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \tau(\omega) \leq \tau_1(\omega) \\ o \text{ si } \tau(\omega) > \tau_1(\omega) \end{cases}$$

2) Existence et unicité de la solution du problème continue

Notons

$c_\lambda(y,v)=a_\lambda(y,v)-(\Pi(Dy),v)$

c_λ a les propriétés suivantes:

-Monotonie $\exists\lambda_0$ et $\beta>0$ $\forall\lambda\geqslant\lambda_0$ $c_\lambda(y,y-v)-c_\lambda(v,y-v)\geqslant\|y-v\|^2_\beta$

-Hemicontinuité $\lim_{\rho\to 0} c_\lambda(y-\rho w,v)=c_\lambda(y,v)$

-Borné sur tout borné de VxV

$-c_\lambda(y,y)$ est faiblement inf compact

cf. Quadrat [10]

D'aprés les théorèmes 8.2 et 8.3 Ch. 2 Lions [9] on a le

Théorème 2.1

Sous les hypothèses du paragraphe précédent, il existe λ_0 tel que $\forall\lambda\geqslant\lambda_0$ le problème

$c_\lambda(y,v-y)\geqslant l(v-y)\quad\forall v\in V\qquad v,y\leqslant F$

admet une solution unique.

le théorème est également vrai $\forall\lambda\geqslant 0$ cf par ex. Bensoussan-Lions [1]

Remarque 2.1

La remarque 2.5 de Brezis Stampacchia [3] donne sous les hypothèses données ci-dessus la regularité $W^{2,p}(\mathcal{O})$ de la solution. Des majorations analogues à Bensoussan Friedman [2] donne également le resultat

3) Approximation de l'I.V.

3.1 Construction du problème approché

Soit :

- (V_ξ, p_ξ, r_ξ) une approximation interne convergente de V
- (H_η, q_η, s_η) une approximation interne convergente de H

vérifiant $f_1 \geq f_2 \Rightarrow q_\eta s_\eta f_1 \geq q_\eta s_\eta f_2$

- $(W_\eta, \bar{q}_\eta, \bar{s}_\eta)$ une approximation interne convergente de W.

W espace des contrôles ; $\mathcal{U} \subset W$; W sera $L^q(\mathcal{O}; R^m)_{1<p<\infty}$

On impose de plus aux deux dernieres approximations:

$$\forall z \in L^2(\mathcal{O}; R^n) \quad \Pi_\eta(z) = \underset{v \in \mathcal{U}}{\mathrm{Min}}\ q_\eta s_\eta (b(\cdot, \bar{q}_\eta \bar{s}_\eta u(\cdot)).z + f(\cdot, \bar{q}_\eta \bar{s}_\eta u(\cdot)))$$

d'exister

On pose :

$$c_{\lambda\eta}(p_\xi y_\xi, p_\xi v_\xi) = a_\lambda(p_\xi y_\xi, p_\xi v_\xi) - (\Pi_\eta(D(p_\xi y_\xi)), p_\xi v_\xi)$$

Le problème approché de (1.19) s'ecrit alors:

(3.1) Trouver $y_\xi \in V_\xi$: $p_\xi y_\xi \leq F$

$$c_{\lambda\eta}(p_\xi y_\xi, p_\xi (v_\xi - y_\xi)) \geq l(p_\xi (y_\xi - v_\xi)) \quad \forall v_\xi \in V_\xi \quad p_\xi v_\xi \leq F$$

Donnons maintenant un lemme qui nous servira plusieurs fois dans la suite:

Lemme 3.1

$\exists$ k independante de η :

$$\frac{1}{k}\left|\Pi_\eta(z_1)-\Pi(z_2)\right| \leqslant \left|(I-q_\eta s_\eta)\Pi(z_2)\right| + \left|z_2-z_1\right|_{L^2(\sigma;R^n)} + \left|(\bar{q}_\eta \bar{s}_\eta - I)u_2\right|_{L^2(\sigma;R}$$

$$+\left|z_2\right|_{L^p(\sigma;R^n)}\left|(\bar{q}_\eta \bar{s}_\eta - I)u_2\right|_{L^q(\sigma;R^m)}$$

avec $\infty > p > 2$ $\quad \frac{2}{p}+\frac{2}{q}=1$

u_2 vérifiant $\Pi(z_2)=\Psi(u_2,z_2)$

enfin

$$\left|\Pi_\eta(z_1)-\Pi_\eta(z_2)\right| \leqslant k\left|z_2-z_1\right|_{L^2(\sigma;R^n)}$$

démonstration dans Quadrat [10]

Existence et unicité du problème approché (3.1)

On munit V_ξ du produit scalaire usuel dans R^N, noté $[\,,\,]$

(N=dimension de V_ξ)

Le problème (3.1) se réécrit

$$(3.2) \qquad \left[p'_\xi A_\lambda p_\xi y_\xi - p'_\xi \Pi_\eta (D\, p_\xi y_\xi), v_\xi - y_\xi\right] \geqslant \left[f_\xi, v_\xi - y_\xi\right] \qquad \forall v_\xi$$

avec f_ξ définie par $[f_\xi, v_\xi] = l(p_\xi v_\xi)$ $\qquad p_\xi v_\xi, p_\xi y_\xi \leqslant F$

On écrira (3.2) sous la forme:

$$(3.3) \qquad \left[c_{\lambda\xi\eta}(y_\xi) - f_\xi, v_\xi - y_\xi\right] \geqslant 0 \qquad \forall v_\xi \qquad p_\xi v_\xi, p_\xi y_\xi \leqslant F$$

$c_{\lambda\eta}$ a les propriétes suivantes:

-Monotonie: $\exists \lambda_0, \beta>0 : \forall \lambda > \lambda_0$

$$c_{\lambda\eta}(p_\xi y_\xi, p_\xi y_\xi - p_\xi v_\xi) - c_{\lambda\eta}(p_\xi v_\xi, p_\xi y_\xi - p_\xi v_\xi) \geq \beta \| p_\xi y_\xi - p_\xi v_\xi \|^2$$

-Continuité de $C_{\lambda\xi\eta}(\cdot)$

cf. Quadrat [10]

Montrons maintenant l' <u>existence d'une solution du problème</u> approché (on reprend la démonstration des Th 8.1 et 8.2 ch. 2 Lions [9])

Soit $B_R = \{ v_\xi \in V_\xi / \| v_\xi \| \leq R \}$ et $K_R = K \cap B_R$ $K = \{ v_\xi \in V_\xi / \quad p_\xi y_\xi \leq F \}$

Soit alors y_ξ^R solution de:

$$[C_{\lambda,\xi,\eta}(y_\xi^R), v_\xi^R - y_\xi^R] \geq [f_\xi, v_\xi^R - y_\xi^R] \quad \forall v_\xi^R \in K_R \quad y_\xi^R \in K_\xi^R \tag{3.4}$$

ou encore

$$[y_\xi^R, v_\xi^R - y_\xi^R] \geq [y_\xi^R - C_{\lambda\xi\eta}(y_\xi^R) - f_\xi, v_\xi^R - y_\xi^R] \quad \forall v_\xi^R \in K_\xi^R \quad y_\xi^R \in K_\xi^R \tag{3.5}$$

On note P_ξ la projection sur K_ξ^R pour $[,]$;(3.5) est équivalent

$$y_\xi^R = P_\xi (y_\xi^R - C_{\lambda\xi\eta}(y_\xi^R) - f_\xi)$$

grâce à la continuité de $C_{\lambda\xi\eta}$ on peut appliquer le th. du point fixe de Brouwer à l'application $w \dashrightarrow P_\xi(w - C_{\lambda\xi\eta}(w) - f_\xi)$ qui assure l' existence de la solution y_ξ^R de (3.4).

Montrons maintenant que y_ξ^R est bornée indépendamment de R.

On a

$$c_{\lambda\eta}(p_\xi y_\xi^R, p_\xi y_\xi^R - p_\xi v_\xi^R) - c_{\lambda\eta}(p_\xi v_\xi^R, p_\xi y_\xi^R - p_\xi v_\xi^R) \geq \|p_\xi y_\xi^R - p_\xi v_\xi^R\|_\beta^2$$

On peut prendre $v_\xi^R = o$ d'où:

$$c_{\lambda\eta}(p_\xi y_\xi^R, p_\xi y_\xi^R) - c_{\lambda\eta}(o, p_\xi y_\xi^R) \geq \|p_\xi y_\xi^R\|_\beta^2$$

Mais

$$c_{\lambda\eta}(p_\xi y_\xi^R, p_\xi y_\xi^R) \leq |f_\xi|\,|p_\xi y_\xi^R|$$

et

$$c_{\lambda\eta}(o, p_\xi y_\xi^R) \leq M|p_\xi y_\xi^R| \quad (\varphi \text{ borné })$$

et donc

$$\|p_\xi y_\xi^R\| \leq M + |f_\xi|$$

ce qui assure l'existence d'une solution à (3.3) en faisant tendre

$R \dashrightarrow \infty$.

Montrons l'unicité

Supposons qu'il existe deux solutions y_ξ^1 et y_ξ^2

$$c_{\lambda\eta}(p_\xi y_\xi^1, p_\xi(y_\xi^2 - y_\xi^1)) \geq (f_\xi, p_\xi(y_\xi^2 - y_\xi^1))$$

$$-c_{\lambda\eta}(p_\xi y_\xi^2, p_\xi(y_\xi^2 - y_\xi^1)) \geq -(f_\xi, p_\xi(y_\xi^2 - y_\xi^1))$$

en sommant on obtient

$$-c_{\lambda\eta}(p_\xi(y_\xi^2 - y_\xi^1), p_\xi(y_\xi^2 - y_\xi^1)) \geq o \quad \text{la coércivité} \Rightarrow y_\xi^1 = y_\xi^2$$

Théorème

Le problème 3.1 a une solution unique pour $\lambda \geqslant \lambda_0$

3.2 Convergence de l'approximation et majoration d'erreur

Théorème:

La solution du problème approché (3.1) y_ξ converge dans V vers la solution y du problème continu (1.19) ; on a de plus la majoration d'erreur suivante:

$$(3.6)\ \|y-p_\xi y_\xi\| \leqslant k\left(\sqrt{|\theta|\,|y-p_\xi m_\xi|} + \|y-p_\xi m_\xi\| + |(I-q_\eta s_\eta)\Pi(y)| + |(\bar{q}_\eta \bar{s}_\eta - I)u|\right.$$

$$\left. + |y|_{W^{1,p}} |(\bar{q}_\eta \bar{s}_\eta - I)u|_{L^q}\right) \qquad \forall m_\xi \quad p_\xi m_\xi \leqslant F$$

avec $u \in \operatorname{Argmin} \Pi(Dy)$ et $2<p<+\infty$ et $\frac{2}{p}+\frac{2}{q}=1$; $\theta = A_\lambda y - \Pi(Dy) - f$

Démonstration

La monotonie du problème approché donne:

$$c_{\lambda\eta}(p_\xi y_\xi, p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi) - c_{\lambda\eta}(p_\xi m_\xi, p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi) \geqslant \beta \|p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi\|^2$$

$$(3.7)\ c_{\lambda\eta}(p_\xi y_\xi, p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi) - c_\lambda(y, p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi) + c_\lambda(y, p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi)$$

$$- c_{\lambda\eta}(p_\xi m_\xi, p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi) \geqslant \beta \|p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi\|^2$$

mais

$$c_{\lambda\eta}(p_\xi y_\xi, p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi) \leqslant (f, p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi)$$

$$-c_\lambda(y, p_\xi y_\xi - y) \leqslant (f, y - p_\xi y_\xi)$$

(3.7) donne

$$(3.8)\quad (f, y-p_\xi m_\xi)-c_\lambda(y, y-p_\xi m_\xi)+c_\lambda(y, p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi)-c_{\lambda\eta}(p_\xi m_\xi, p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi)$$
$$\geqslant \beta \, \| p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi \|^2$$

En posant

$\theta = A_\lambda y - \Pi(Dy) - f$ ($\theta \in L^p$ grâce à la régularité de y)

on obtient

$$(f, y-p_\xi m_\xi)-c_\lambda(y, y-p_\xi m_\xi) \leqslant |\theta| \cdot |y-p_\xi m_\xi|$$

D'autre part

$$c_\lambda(y, p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi) - c_{\lambda\eta}(p_\xi m_\xi, p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi) \leqslant M \|y-p_\xi m_\xi\| \cdot \|p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi\|$$
$$+(\Pi(Dy)-\Pi_\eta(Dp_\xi m_\xi), p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi)$$

Mais d'aprés le lemme 3.1 il existe k tel que:

$$(\Pi(Dy)-\Pi_\eta(Dp_\xi m_\xi), p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi) \leqslant \left(\varepsilon(\eta)+k\|y- p_\xi m_\xi\|\right) \cdot |p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi|$$

avec

$$\varepsilon(\eta) = |(I-q_\eta s_\eta)\Pi(Dy)| + |(\bar{q}_\eta \bar{s}_\eta - I)u|_{L^2} + |y|_{W^{1,p}} \cdot |(\bar{q}_\eta \bar{s}_\eta - I)u|_{L^q}$$

on obtient donc pour (3.8)

$$(3.9)\quad \beta \| p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi \|^2 \leqslant |\theta| \cdot \|y-p_\xi m_\xi\| + (\varepsilon(\eta) + \overset{(M+k)}{\cancel{}} \|y- p_\xi m_\xi\|) \|p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi\|$$

en notant

$a_1 = |\theta| \cdot |y-p_\xi m_\xi|$

$a_2 = \varepsilon(\eta)+(M+k) \cdot \|y- p_\xi m_\xi\|$

(3.9) se réécrit

$\beta z^2 \leqslant a_1 + a_2 z \qquad z \geqslant 0$

d'où $z \leqslant \dfrac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4\beta a_1}}{2\beta}$

et donc il existe k indépendant de ξ et η :

$z \leqslant k(a_2 + \sqrt{a_1})$

d'où en utilisant l'inégalité triangulaire

$\| y - p_\xi y_\xi \| \leqslant \| y - p_\xi m_\xi \| + \| p_\xi y_\xi - p_\xi m_\xi \|$

le théorème ■

Remarque

En général les contrôles ne convergent pas, par contre

$b(\cdot, q_\eta u_\eta(\cdot)) \dashrightarrow b^*(\cdot)$ dans $\sigma(L^\infty, L^1)$

$\varphi(\cdot, q_\eta u_\eta(\cdot)) \dashrightarrow \varphi^*(\cdot)$ dans $\sigma(L^\infty, L^1)$

avec $b^* Dy + \varphi^* = \Pi(Dy)$ Quadrat [10] ■

Remarque

On pourra choisir m_ξ tel que $\| y - p_\xi m_\xi \| \xrightarrow[\xi \to 0]{} 0$

Cf. Goursat-Quadrat [8]. Dans le cas particulier $F = p_\xi F_\xi$ on prendra

m_ξ = interpollé de y. De plus on peut toujours se ramener à

ce dernier cas en translatant de F la solution de 1.19. ■

4) Resolution numérique

4.1 Exemple d'approximation

On considère un ouvert $\mathcal{O}$ parallélépipédique.

$\mathcal{O}_\xi$ et $\mathcal{O}_\eta$ deux partitions de $\mathcal{O}$ en parallélépipèdes telles que

$$\mathcal{O}=\bigcup_i \mathcal{O}_\xi^i=\bigcup_{ij} \mathcal{O}_\eta^{ij}$$

$$\mathcal{O}_\xi^i=\bigcup_j \mathcal{O}_\eta^{ij}$$

Dans ce qui suit nous prendrons $\mathcal{O}_\xi=\mathcal{O}_\eta$

L'hypothèse d'existence de $\Pi_\eta(z)$ impose le type d'approximation des contrôles : fonctions constantes par élément. Nous prenons donc :

(H_η, q_η, s_η) avec:

$H_\eta=R^N$ N=nbre d'éléments

$$q_\eta : R^N \dashrightarrow L^2(\mathcal{O})$$
$$y_\eta \qquad \sum_i y_\eta^i \chi_i(x) \qquad \chi_i(x)=\chi_{\mathcal{O}_i}(x)$$

$$s_\eta : L^2 \dashrightarrow R^N$$
$$y \qquad y_\eta \qquad y_\eta^i=\frac{1}{\operatorname{mes}\mathcal{O}_i}\int_{\mathcal{O}_i} y\,dx$$

$(W_\eta, \bar{q}_\eta, \bar{s}_\eta)$

$W_\eta=R^{Nxm}$

$$q : R^{Nxm} \dashrightarrow L^2(\mathcal{O};R^m)$$
$$u_\eta \qquad \sum u_\eta^i \chi_i(x) \qquad u_\eta^i \in R^m$$

$$s : L^2(\mathcal{O};R^m) \dashrightarrow R^{Nxm}$$
$$u \qquad u_\eta^i=\frac{1}{\operatorname{mes}(\mathcal{O}_i)}\int_{\mathcal{O}_i} u\,dx$$

Pour l'approximation de V nous allons prendre des éléments Q_1: fonctions de base linéaires sur chaque composante (la majoration d'erreur montre qu'il est inutile de prendre une approximation d'ordre plus élevé)

(V_ξ, p_ξ, r_ξ)

$V_\xi = R^{N_o}$ N_o =nbre de noeuds

$p_\xi : R^{N_o} \dashrightarrow H^1$

$y_\xi \qquad p_\xi y = \sum y^i e^i(x)$ e^i=fonction de base valant 1 au noeud i, noté x_i, o aux autres noeuds, linéaire par élément par composante de x.

$r_\xi : H^1 \text{---------} R^{N_o}$

$y \qquad y(x_i) \qquad i = 1, \dots N_o$

Remarque:

Si $V = H_o^1$ alors $V_\xi = \{ y \in R^{N_o} : y_\xi^i = o$ si i est un noeud de $\Gamma \}$.

Théorème 4.1

Si $y \in W^{2,p}$; $u \in W^{1,q}$ $\infty > q > 2$ on a la majoration :

$\|y - p_\xi y_\xi\| \leqslant k(\xi + \eta)$ avec y solution de (1.19) et y_ξ de (3.1)

si $u \in L^q$ on a seulement la convergence dans H^1

Démonstration

En utilisant le théorème précédent et Ciarlet Raviart [5]

on obtient le résultat dans le cas p F =F sinon on translate y de F

Remarque :

L'ouvert considéré ici (parallélépipède) n'est pas de frontière C^2, hypothèse nécessaire au théorème de Strook-Varadhan[ ] utilisé en 1. On peut rajouter une étape qui consiste à approcher $\mathcal{O}$ avec Γ de classe C^2 par un ouvert $\mathcal{O}_\xi$ à côtés parallèles aux axes, ou utiliser des éléments finis isoparamétriques.

4.2 Algorithme de résolution

u_ξ^o donné on calcule y_ξ^o puis u_ξ^1 ...... $u_\xi^n, y_\xi^n, u_\xi^{n+1}$, ...

Etape 1 Calcul de y_ξ^n à partir de u_ξ^n en résolvant l'I.V. linéaire suivante :

(4.1) $$\begin{cases} a_\lambda(p_\xi y_\xi^n, p_\xi v_\xi - p_\xi y_\xi^n) - (q_\xi s_\xi \psi(Dp_\xi y_\xi^n, \bar{q}_\xi u_\xi^n), p_\xi v_\xi - p_\xi y_\xi^n) \geqslant l(p_\xi v_\xi - p_\xi y_\xi^n) \\ p_\xi y_\xi^n \leqslant F \qquad \forall \xi \quad p_\xi v_\xi \leqslant F \end{cases}$$

Etape 2 Calcul de u_ξ^{n+1} à partir de y_ξ^n

(4.2) $$u_\xi^{n+1} \in \mathcal{J}(y_\xi^n) = \{u_\xi : q_\xi s_\xi \psi(Dp_\xi y_\xi^n, \bar{q}_\xi u_\xi) = \Pi_\eta(Dp_\xi y_\xi^n)\}$$

Notons $A^u_{\xi\eta}$ la matrice définie par

(4.3) $$[y_\xi, A^u_{\xi\eta} v_\xi] = a_\lambda(p_\xi y_\xi, p_\xi v_\xi) - (q_\eta s_\eta \psi(Dp_\xi y_\xi, \bar{q}_\eta u_\eta), p v_\xi) \quad \forall y_\xi, v_\xi \in V_\xi$$

Nous faisons l'hypothèse :

(4.4) $$\begin{cases} A^u_{\xi\eta} \text{ a tous ses termes hors diagonaux négatifs ou nuls} \\ \forall u_\eta : \bar{q}_\eta u_\eta \in \mathcal{U} . \end{cases}$$

Remarque

Cette hypothèse est réalisée en dimension 1 ou 2 dès que ξ est suffisamment petit par le type d'approximation utilisé, pour un opérateur dont la partie principale est le laplacien. cf. Quadrat [10] .

Cette hypothèse est suffisante pour obtenir la propriété du maximum discret et une interprétation probabiliste du problème approché en terme de contrôle de chaine de Markov. L'algorithme s'interprète alors comme un algorithme de Howard généralisé.

Théorème 4.2

$\exists \lambda_0 \quad \forall \lambda \geq \lambda_0$, sous l'hypothèse (4.4) y_ξ^n tend en décroissant vers la solution y_ξ^* de (3.1)

Toute suite convergente de u_ξ^n converge vers un élément de $\mathcal{J}(y_\xi^*)$.

Démonstration

a) $y_\xi^n \geq 0 \ \forall n$

en remplaçant dans (4.1) $v_\xi = \sup(y_\xi^n, 0)$ $\quad v_\xi = y_\xi^{n+} + y_\xi^{n-}$ on obtient:

$$y_\xi^{n^+} A^{u^n}_{\lambda\xi\xi} y_\xi^{n^-} - a_\lambda(p_\xi y_\xi^{n^-}, p_\xi y_\xi^{n^-}) - (q_\xi s_\xi b(\bar{q}_\xi u_\xi^n) D p_\xi y_\xi^{n^-}, p_\xi y_\xi^{n^-}) \geqslant o$$

car f et g et F sont positifs.

l'hypothèse (4.4) et la coercivité de la somme des 2 derniers termes donnent le résultat.

b) $y_\xi^n \geq y_\xi^{n+1}$

en prenant dans $(4.1)_n$ $v_\xi = \sup(y_\xi^n, y_\xi^{n+1})$

dans $(4.1)_{n+1}$ $v_\xi = \inf(y_\xi^n, y_\xi^{n+1})$

et en additionnant les deux inéquations obtenues il vient:

$$(4.5)\ a_\lambda(p_\xi w, p_\xi w^-) - (q_\xi s_\xi b(\bar{q}_\xi u_\xi^{n+1}) D p_\xi w, p_\xi w^-) \geqslant (R, p_\xi w^-)$$

avec :

$w = y_\xi^n - y_\xi^{n+1}$

$R = q_\xi s_\xi ((b(\bar{q}_\xi u_\xi^n) - b(q_\xi u_\xi^{n+1})) D p_\xi y_\xi^n + \varphi(\bar{q}_\xi u_\xi^n) - \varphi(\bar{q}_\xi u_\xi^{n+1}))$

or

$R \geqslant o$ grâce à (4.2) et à ($y_\xi \geqslant o \Rightarrow p_\xi y_\xi \geqslant o$ pour les éléments finis choisis ici)

(4.5) se réécrit:

$$w^+ A^{u^{n+1}}_{\lambda\xi\xi} w^- - a_\lambda(p_\xi w^-, p_\xi w^-) - (q_\xi s_\xi b(\bar{q}_\xi u_\xi^{n+1}) D p_\xi w^-, p_\xi w^-) \geqslant o$$

et comme pour la positivité cela entraine $w^- = o$ et donc

$y_\xi^n \geqslant y_\xi^{n+1}$

le théorème s'obtient alors comme dans Quadrat [10].

Remarque:

Pour résoudre (4.1) on utilisera par exemple la méthode de relaxation avec projection cf. par ex. Glowinski-Lions-Trémolières [6].

4.2. Exemple et résultats numériques

On prend $\mathcal{O} =]0,1[\times]0,1[$

L'inéquation à résoudre est:

$$\begin{cases} -\Delta v + v - \operatorname{Min}\left\{ u_1 \frac{\partial v}{\partial x} + u_2 \frac{\partial v}{\partial y} + 1/2(u_1^2 + u_2^2) \right\} \leq f \\ v \leq F \\ (-\Delta v + v - \operatorname{Min}\{\ \} - f)(v - F) = 0 \end{cases}$$

conditions aux limites:

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial v}{\partial \gamma}\right|_\Gamma \leq 0 \\ v \leq F \\ \left.\frac{\partial v}{\partial \gamma}\right|_\Gamma (v - F) = 0 \end{cases}$$

on prend

$F = 1$

$$f=\begin{cases} 2 \text{ si}(x,y)\in\left[1/4,3/4\right]\times\left[1/4,3/4\right] \\ -f_1-f_2+f_3+1/2(f_4^2+f_5^2) \end{cases}$$

avec

$$f_1=-4^8.2.(y-1/4)^2(y-3/4)^2((2.x-1)^2+2(x-1/4)(x-3/4))$$

$$f_2=-4^8.2.(x-1/4)^2(x-3/4)^2((2.y-1)^2+2(y-1/4)(y-3/4))$$

$$f_3=-4^8.\quad(x-1/4)^2(x-3/4)^2(y-1/4)^2(y-3/4)^2+1$$

$$f_4=-4^8.2.(2x-1)(x-1/4)(x-3/4)(y-1/4)^2(y-3/4)^2$$

$$f_5=-4^8.2.(2y-1)(y-1/4)(y-3/4)(x-1/4)^2(x-3/4)^2$$

La solution est alors

$$v=\begin{cases} f_3 \text{ si}(x,y)\in\left[1/4,3/4\right]\times\left[1/4,3/4\right] \\ 1 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

et le contrôle

$$u_1=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad u_2=\frac{\partial v}{\partial y}\quad \text{sur}(x,y)\in\left[1/4,3/4\right]\times\left[1/4,3/4\right]$$

pas de discrétisation $h=(h_1,h_2)$ avec $h_1=h_2=1/20$

les tests d'arrêts sont:

-pour la relaxation $2.5\ 10^{-5}$ pour la norme L^1 discrète de la différence de deux itérés(Résolution de l'I.V à u fixé)

-pour les itérations de minimisation : $2.5\ 10^{-5}$ pour la norme L^1 discrète de la différence de deux itérés.

Nombre d'itérations de minimisation 4 en partant de u=o

Nombre total d'itérations de relaxation 77(38,24,14,1 pour chacune des itérations de minimisation)

Erreur discrète en norme L^{∞} : $6\ 10^{-3}$

la figure 1 représente une coupe de la solution, la figure 2 une coupe de l'erreur (x=1/2).

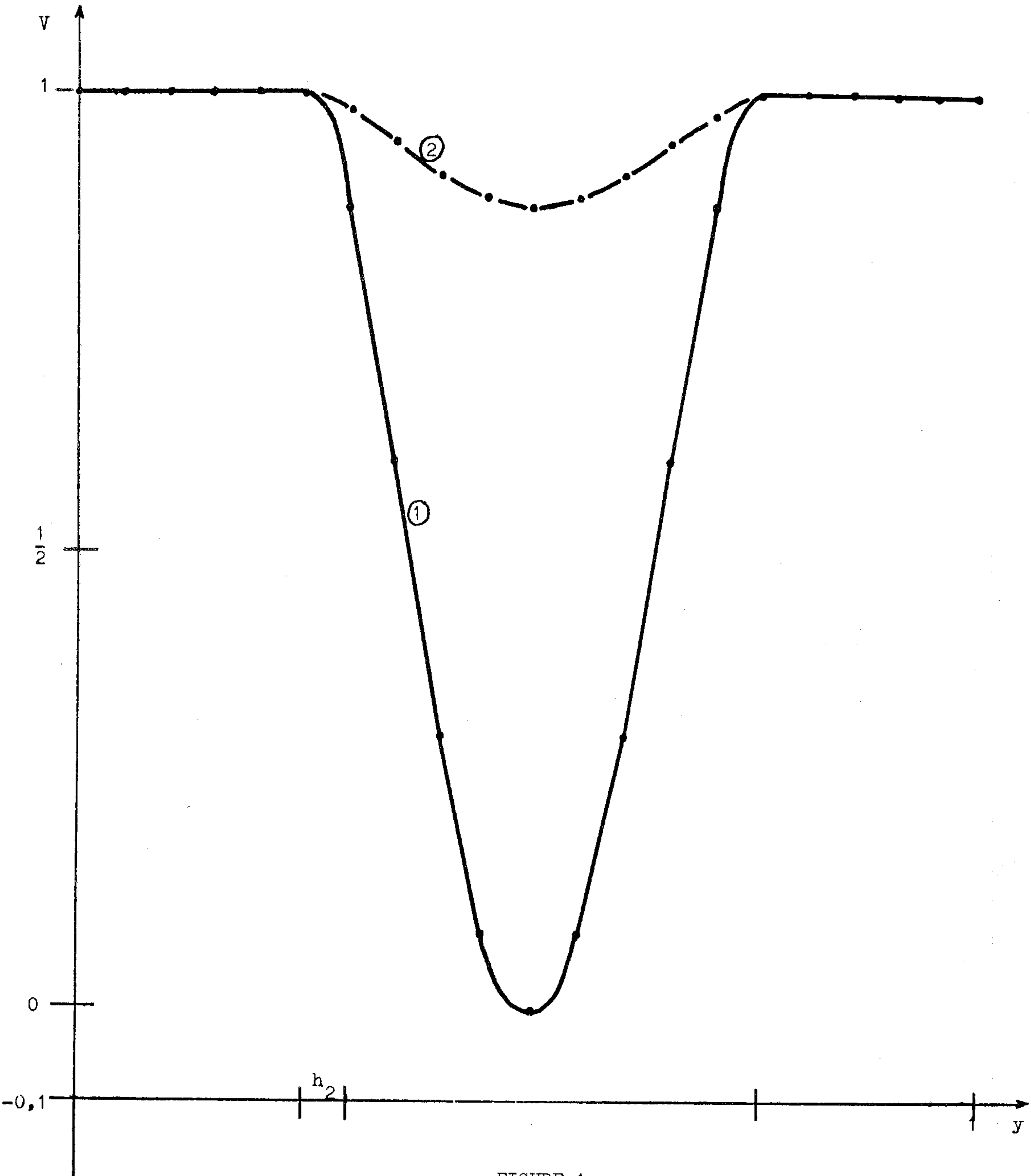

FIGURE 1

Coupes de la solution V

courbes : ① V(0,5,y)
② V(0,3,y) y ∈ (0,1)

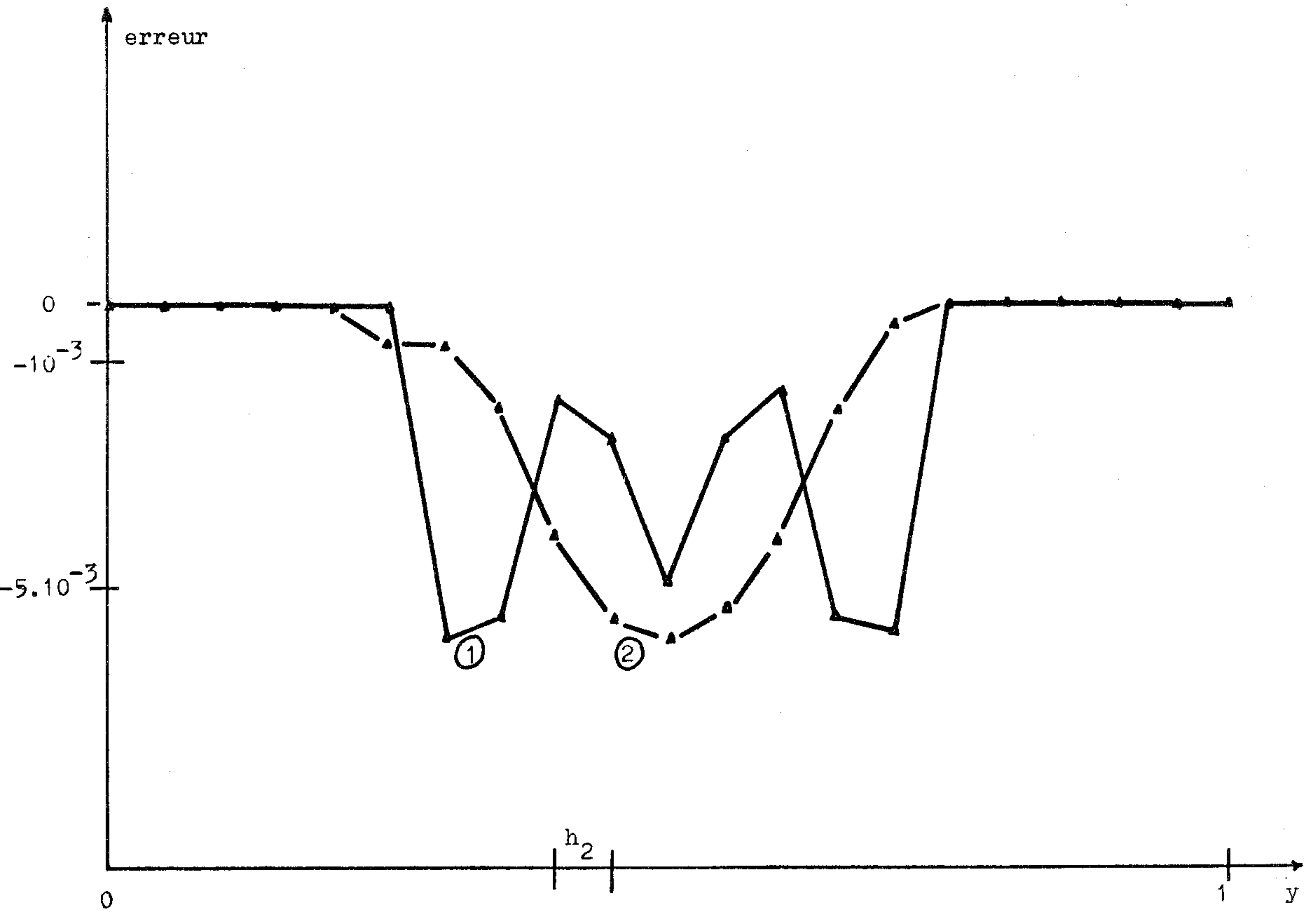

FIGURE 2

Coupes de l'erreur

courbes : (1) $\hat{V}(0,5,y) - V(0,5,y)$ $y \in (0,1)$ $\hat{V}$ solution exacte

(2) $\hat{V}(0,3,y) - V(0,3,y)$ V solution calculée

Conclusion

Deux approches possibles pour résoudre numériquement ces problèmes de temps d'arrêt optimaux sont:

-la méthode probabiliste (Kushner-Chen-Fu-Yu[7]) qui consiste à approcher la diffusion par une chaine de Markov. La convergence en loi de la chaine de Markov contrôlée vers la diffusion contrôlée("invariant principle" Strook-Varadhan[13]) donne la convergence ponctuelle du coût.

-la méthode d'analyse fonctionnelle exposée ici permet d'obtenir (lorsqu'elle s'applique :cadre coercif) des résult-ats plus forts :convergence H^1 du cout et majoration d'erreur.

Bibliographie

[1] A.BENSOUSSAN-J.L.LIONS Ouvrage en préparation

[2] A.BENSOUSSAN-A.FRIEDMAN Nonlinear inéqualities and differential games with stopping times.J.of Functional Analysis p305-351 July 1974

[3] H.Brezis -G.Stampacchia Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques Bull.Soc.Math.France p.153-180 1968

[4] H.Chernoff Optimal stochastic control Sankya série A v.30 T.3 1968

[5] Ph.Ciarlet P.A.Raviart Cours sur les éléments finis Paris 6 1972

[6] R.Glowinski J.L.Lions R.Trémolières Analyse numérique d'inéquations variationnelles à paraitre Dunod

[7] H.Kushner Chen-Fu-Yu Approximations existence and numerical procedures for optimal stochastic control J.Math.Analysis and Appl. p.573-587 1974

[8] M.Goursat J.P.Quadrat Analyse numérique d'inéquations associés à des problèmes de contrôle impulsionnel Rapport Laboria à paraitre

[9] J.L.Lions Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires Dunod 1969

[10] J.P.Quadrat Analyse numérique de l'équation de Bellman associée aux problèmes de contrôle de diffusion Rapport Laboria 1975

[11] R.W.Rishel Weak solution of a partial differential equation of dynamic programming SIAM J.of control NOv.1971

[12] A.N.Shiriaev Statistical Sequential Analysis Am.Math.Soc. vol.38 1973

[13] D.W.Strook S.R.Varadhan Diffusion process with boundary condition Com.on pure and applied math. 1971

[14] R.Stratanovitch Conditionnal Markov processes and their application to the theory of optimal control Elsevier 1968

[15] P.Van Moerbeke An optimal stopping problem with linear reward Thèse Université de Louvain