OK

N° d'ordre :

THÈSE

DE DOCTORAT D'ÉTAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE PARIS DAUPHINE
U. E. R. MATHÉMATIQUES DE LA DÉCISION

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

par

Jean Pierre QUADRAT

Sujet de la thèse :

SUR L'IDENTIFICATION ET LE CONTRÔLE DE SYSTÈMES DYNAMIQUES STOCHASTIQUES

Directeur de Recherche :

Alain BENSOUSSAN

Soutenue le 19 juin 1981 devant la Commission composée de :

MM.	J. L. LIONS	Président
	A. BENSOUSSAN	
	G. CHAVENT	
	W. H. FLEMING	
	J. M. LASRY	
	M. METIVIER	

A mes parents, Dany, Arnaud et Alban ...

Je voudrais remercier

J.L. Lions pour m'avoir permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions possibles en m'acceptant comme chercheur à l'I.N.R.I.A.. Il n'a jamais cessé de me faire confiance depuis le premier jour, et me fait aujourd'hui l'honneur d'accepter la présidence du Jury ;

A. Bensoussan qui depuis mon entrée à l'I.N.R.I.A. m'a prodigué confiance, conseils, amitié, encouragements, m'a initié à la recherche, m'a alimenté de nombreux sujets tout en me laissant la plus grande liberté ;

Que tous mes camarades de travail soient également remerciés, tout particulièrement F. Delebecque, M. Goursat, P. Kokotovic et M. Viot avec lesquels la plupart des travaux présentés ici ont été écrits ou étendus. Ce travail est presque autant le leur que le mien.

Ch. Pichon a réalisé ce mémoire avec beaucoup de soin, malgré les nombreuses retouches et ma mauvaise écriture, je tiens également à l'en remercier.

P L A N

INTRODUCTION

Les systèmes dynamiques stochastiques se rencontrent très fréquemment dans les applications. Au Chapitre 5, on trouvera une description des problèmes de gestion de barrages pour la production d'énergie électrique. Ces problèmes constituent un champ très intéressant d'applications qui a motivé nos recherches pendant plusieurs années.

Bien d'autres exemples existent aussi bien dans les sciences de l'ingénieur que dans les domaines de la gestion et de l'économie.

Un système dynamique stochastique est caractérisé par son état qui est un processus stochastique, dont l'évolution est modifiée par un contrôle adapté aux observations.

Il s'agit de trouver un contrôle optimal, i.e. qui minimise un critère en général du type espérance mathématique. La théorie du contrôle stochastique fournit une solution théorique au problème, pourvu que l'on soit en information parfaite et que le processus qui représente l'état soit un processus de Markov.

Pratiquement cela conduit à s'intéresser à des processus qui sont des diffusions avec saut.

Cette hypothèse n'est pas irréaliste pour les applications. Mais la théorie suppose que l'on dispose d'un modèle (i.e., que les fonctions dérive, diffusion, mesure des sauts, soient connues). De plus les résultats les plus satisfaisants (contrôle optimal défini par un feedback) ne sont vraiment disponibles que dans le cas non dégénéré (matrice représentant le terme de diffusion inversible).

Dans les applications il est en général exclus de disposer d'un modèle à priori (on dispose de séries chronologiques). De plus, en général le bruit n'apparaît que sur certaines équations (donc la matrice de diffusion n'est pas inversible). Il faut donc mettre au point des techniques d'identification de diffusions avec saut, et étudier sur les plans théorique et pratique le contrôle stochastique de systèmes dynamiques dégénérés.

Sur le plan numérique on est conduit, après ces étapes, à la résolution de l'équation de la programmation dynamique stochastique ou équation de Hamilton Jacobi Bellman. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles non linéaire dont la dimension est en général grande. On rencontre très vite donc une difficulté nouvelle qui est l'étude des grands systèmes dynamiques stochastiques.

Toutes ces questions que l'on ne peut éviter si l'on veut vraiment calculer effectivement des contrôles, nous ont conduit à des développements théoriques originaux, qui font l'objet de ce travail. Ces résultats ont été appliqués à des problèmes réels qui ont fait ou feront l'objet d'autres publications.

Notre travail présenté dans le cadre de cette thèse porte donc sur :

- l'identification de processus de diffusion avec sauts,
- les problèmes de contrôle stochastique lorsque le bruit n'apparaît que sur certaines équations,
- l'analyse numérique de l'équation de Hamilton Jacobi Bellman,
- le développement d'algorithmes permettant de surmonter dans certains cas les difficultés dues à la taille du système (perturbations, structures particulières des commandes).

C'est bien sur ce dernier point qui fait l'objet de développements importants actuellement. Malheureusement on ne maîtrise encore que des cas particuliers. Un effort considérable reste à faire.

Nous nous sommes limités aux problèmes à information complète. Il y a là un champ suffisamment important d'applications et encore bien des problèmes non résolus.

Le cas général (observation incomplète) pose soit des problèmes de dimension véritablement astronomiques (l'état est défini par une probabilité conditionnelle), soit se traite dans des cas de structures très particulières (principe de séparation), très restrictives pour les applications.

Nul doute cependant qu'un effort doit être accompli dans cette direction. Des progrès peuvent être obtenus grâce en particulier aux moyens de calcul parallèle appliquées à des algorithmes de type gradient stochastique, ou bien grâce à une réflexion sur la structure du filtre (existence de statistiques exhaustives de dimension finie).

Dans ce qui suit, nous décrivons la contribution de ce travail.

1. IDENTIFICATION DES CARACTÉRISTIQUES LOCALES DES PROCESSUS DE DIFFUSION AVEC SAUTS. (*F. Delebecque, J.P. Quadrat*).

On considère les processus de diffusion avec sauts, solution de :

$$X_t = X_o + \int_o^t b(s,X_s)ds + \int_o^t \sigma(s,X_s)dW_s + \int_o^T \int_U u\mu(dt \times du)$$

avec :

$b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bornée

$a = \frac{1}{2}\sigma\sigma^* = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to M_n^+$ matrice (n,n) définie strictement positive, continue, bornée.

μ mesure aléatoire sur $\mathbb{R}^+ \times U$ avec $U = \mathbb{R}^m - \{o\}$ définie par :

$$\mu(\omega;dt \times du) = \sum_s 1\!\!1_{X_s \neq X_s^-}(\omega)\ \delta_{s,X_s - X_{s-}}(dt \times du)$$

de projection duale prévisible de la forme :

$$\rho(s,X_s,u)ds \times \nu(du)$$

où ν est une mesure de référence bornée.

$\rho : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^+$ minorée par une constante > 0, et bornée.

On étudie la possibilité d'identifier les fonctions (b,a,ρ) (caractéristiques locales de la semi-martingale X_t) au vu d'une réalisation X du processus.

Dans les deux cas suivants, b,a,ρ indépendants du temps, b,a,ρ dépendant du temps de façon périodique et sous des hypothèses d'ergodicité de X_t, de continuité et de bornitude des fonctions b,a,ρ on montre la possibilité d'identifier en tout point les fonctions b,a,ρ . Dans le cas où ces fonctions sont constantes par morceaux, on peut montrer l'optimalité des estimateurs obtenus.

On utilise pour cela deux théorèmes :

1) Le fait que la variation quadratique d'une martingale continue est égale à son processus croissant. On peut calculer au vu d'une trajectoire la variation

quadratique de la partie continue de la semi-martingale X_t, ainsi que son processus croissant. La formule :

$$VQ_{t,t+\delta}(X^c) = \int_t^{t+\delta} a(s,X_s)ds$$

(où $VQ_{t,t+\delta}$ désigne la variation quadratique calculée sur l'intervalle de temps $t,t+\delta$, X^c désigne la partie continue de X) permet de calculer une approximation de a dans tout voisinage de la trajectoire. L'hypothèse d'ergodicité de X_t et de périodicité en temps de a permet alors de connaître a en tout point.

2) L'estimation des deux fonctions b,ρ s'obtient en utilisant le théorème de Girsanov :

$$(1) \qquad \left.\frac{dP_{b,a,\rho\nu}}{dP_{o,a,\nu}}\right|_{F_t} = \exp \int_o^t (a^{-1}b,dX_t^c) - \frac{1}{2}\int_o^t (a^{-1}b,b)dt \; .$$
$$\exp \int_o^t \int_U \mathrm{Log}\,\rho\mu - \int_o^t \int_U (\rho-1)\; ds \times \nu(du)$$

où $P_{b,a,\rho\nu}$ désigne la loi de X_t de caractéristiques locales $(b,a,\rho\nu)$.

Si les fonctions b et ρ sont constantes par morceaux, il est facile de calculer les estimateurs du max de vraisemblance de ces constantes, de montrer leur convergence et leur optimalité à condition de bien choisir le temps d'arrêt définissant le temps d'observation. Les propriétés gaussiennes asymptotiques, et des vitesses de convergence du type logarithme itéré sont également données Elles découlent des propriétés de martingale des estimateurs.

Dans le cas où b n'est pas constante par morceaux, on se donne une partition (A_i) de $\mathbb{R}^n$ (cas homogène en temps) [resp de $\mathbb{R}^n \times [o,T]$ si T est la période en temps des fonctions b et ρ].

On suppose b de la forme $\sum_i \theta_i \mathbb{1}_{A_i}$ et on calcule les estimateurs du maximum vraisemblance des θ_i.

On montre les propriétés de robustesse de l'estimateur ainsi obtenu :

$$\sup_{(s,x)} \lim_{t\to\infty} |\hat{b}_t - b| \le \omega_\delta(b) \qquad \text{où}$$

t désigne le temps d'observation

ω le module de continuité de b

δ le diamètre de la partition $\{Ai\}$,

$\hat{b}_t = \sum_i \hat{\theta}_t^i \mathbb{1}_{Ai}$

On montre également que lorsque a est l'identité :

$$\lim_{t\to\infty} \hat{b}_t = \mathbb{E}_q(b)$$

où q désigne la mesure invariante de X_t sous des hypothèses d'ergodicité [resp la mesure invariante $\times \frac{dt}{T}$ dans le cas périodique].

Maintenant, si l'on fait varier la partition A avec le temps (A_t) de façon à ce que $\delta(A_t) \xrightarrow[t\to\infty]{} o$ suffisamment lentement, on peut montrer qu'il est possible d'estimer b en tout point, dès que b est continue.

Des résultats analogues sont donnés pour la fonction ρ. On obtient ainsi une extension aux diffusions avec sauts de Delebecque - Quadrat [20].

2. COMMANDE OPTIMALE DES PROCESSUS DE DIFFUSION AVEC SAUTS DÉGÉNÉRÉS OU NON.

Dans de nombreux problèmes de commande optimale, on est en présence d'un système dont certaines équations sont bruitées, d'autres non, le bruit pouvant être continu ou comporter des sauts.

Nous donnons un cadre général pour de tels problèmes et montrons l'existence d'une mesure de probabilité optimale et donnons une construction de cette mesure. Plus précisément, notons par $\mathbb{P}(y,C)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\Omega = \mathbb{D}([o,T] \times \mathbb{R}^n)$ caractérisées comme solution du problème de martingale pour la multiapplication C supposé s.c.s, à valeur convexe :

$$C : [o,T] \times \mathbb{R}^n \to \xi(\mathbb{R}^n \times M_n \times \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n))$$
$$t \quad x \qquad (b(t,x), a(t,x), \nu_{t,x}(du)) \in C(t,x)$$

b est un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n \times [o,T]$;

a est un champ de matrice non négative, symétrique ;

ν est un champ de mesures bornées, positives définies sur $\mathbb{R}^n$;

ξ désigne l'ensemble des parties.

$\mathbb{P}(y,C)$ désigne alors l'ensemble des mesures de probabilités sur $\mathbb{D}([o,T],\mathbb{R}^n)$ tels que :

(1) $\qquad P(X_o=y) = 1$

(2) $\qquad \forall\phi \in C_b^2([o,T] \times \mathbb{R}^n)$

$$\phi(X_t) - \phi(X_o) - \int_o^T L_c\, \phi(s,X_s)ds \quad \text{est une } (P,F_t) \text{ martingale partant de } 0.$$

(3) $$L_c\phi(s,x) = \frac{\partial\phi}{\partial t} + b(s,\omega) \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x} + \operatorname{tr}[a(s,\omega) \cdot \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}]$$
$$+ \int_U [\phi(s,x+u) - \phi(s,x)]\, \nu_{s,\omega}(du)$$

avec $c(s,\omega) = (b(s,\omega), a(s,\omega), \nu_{s,\omega}(du)) \in C(s,X_s^-(\omega))$

L'existence est montrée en construisant une suite de chaînes de Markov de mesures de probabilité P^n convergeant étroitement vers un élément $P \in \mathcal{P}(y,C)$.

On montre ensuite que $\mathcal{P}(y,C)$ est un convexe compact dans l'ensemble $\mathcal{M}^1_+(\Omega)$ des mesures de probabilité sur Ω muni de la convergence étroite.

On en déduit immédiatement que le problème $\underset{P \in \mathcal{P}(y,C)}{\mathrm{Min}} \; \Phi(X_T(\omega))$ avec Φ s.c.i admet une solution, ce qui donne un théorème d'existence général pour les problèmes de commande de processus de diffusion avec sauts (remarquons que si le problème initial comporte un coût intégral, il entre dans cette formulation par adjonction d'une variable d'état supplémentaire).

On formule ensuite un problème de temps de sortie d'un ensemble dont on montre l'existence.

L'étude de la loi du vecteur $X_o, X_h, X_{2h}, \ldots, X_{nh}$ $nh = T$, $h > o$, sous $P \in \mathcal{P}(y,C)$ permet de définir un problème de contrôle de chaîne de Markov dont la loi optimale $P^n \to P^*$ étroitement avec $P^* \in \underset{P \in \mathcal{P}(y,C)}{\mathrm{Arg\ min}} \; \Phi(X_T(\omega))$.

On construit enfin un problème de contrôle de chaîne de Markov à temps et à états discrets ayant la même propriété, ce qui résout le problème de l'analyse numérique d'un tel problème.

Ces résultats étendent aux diffusions avec sauts les résultats donnés dans Quadrat [34], et démontrés dans Quadrat [35].

3. ANALYSE NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE.

Nous effectuons l'analyse numérique de l'équation de la programmation dynamique dans le cas du problème de contrôle de diffusions arrêtées, ou réfléchies non dégénérées, nous donnons des estimations H^1 de l'erreur. Le contrôle n'apparaît ici que dans le terme de dérive.

On considère les problèmes de contrôle :

$$(1)\quad \begin{cases} dX_t = b(X_t,u_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \\ \underset{u}{\mathrm{Min}}\ J(u) = \mathbb{E}\displaystyle\int_0^{\tau} e^{-\lambda t}\ f(X_t,u_t)dt + e^{-\lambda\tau}\ g(X_\tau) \end{cases}$$

où :

X_t est la diffusion de $\mathbb{R}^n$

u_t le contrôle à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

τ un temps de sortie d'un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$

et :

$$(2)\quad \begin{cases} dX_t = b(X_t,u_t)dt + dW_t - \eta(X_t)d\xi_t \\ \underset{u}{\mathrm{Min}}\ J(u) = \mathbb{E}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\ \{f(X_t,u_t)dt + g(X_t)d\xi_t\} \end{cases}$$

où

η désigne la normale à un ouvert convexe

ξ_t désigne un processus croissant strictement croissant lorsque X_t est sur la frontière de l'ouvert $\mathcal{O}$

X_t est donc une diffusion réfléchie sur la frontière de $\mathcal{O}$

Sous certaines hypothèses de régularité des coefficients, les équations de la programmation dynamique des deux problèmes précédents se ramènent à l'étude :

$$a_\lambda(y,v) - (\pi(Dy),v) = \ell(v) \qquad \forall v \in V$$

où V désigne l'espace $H^1_0(\mathcal{O})$ dans le premier cas, $H^1(\mathcal{O})$ dans le second.

a_λ est une forme bilinéaire coercive sur V.

ℓ une forme linéaire continue sur V

$$\pi(p) = \underset{u \in \mathcal{U}(x)}{\mathrm{Min}}\ F(x,u,p) = \sum_i b_i(x,u)p_i + f(x,u) \qquad p \in \mathbb{R}^n$$

Nous construisons une approximation de la façon suivante :

(V_ξ, p_ξ, r_ξ) désigne une approximation interne convergente de V.

(H_η, q_η, s_η) désigne une approximation interne convergente de $H = L^2(\mathcal{O})$ vérifiant $f_1 \geq f_2 \in H \Longrightarrow q_\eta s_\eta f_1 \geq q_\eta s_\eta f_2$.

$(W_\eta, \bar{q}_\eta, \bar{s}_\eta)$ désigne une approximation interne convergente de $W = L^P(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ espace des contrôles.

On impose une condition de compatibilité entre les deux dernières approximations, à savoir :

$$\pi_\eta(z) = \underset{u \in \mathcal{U}}{\mathrm{Min}}\ q_\eta s_\eta\ F(.,\bar{q}_\eta \bar{s}_\eta u(.), z(.)) \quad , \quad \forall z \in L^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^n)$$

d'exister. Cette condition permet de donner un sens scalaire à la minimisation qui sinon ne pourrait avoir qu'un sens vectoriel.

Par exemple, dans le cas des éléments finis P_0 ou Q_0 sur le même élément pour H et W, cette condition est vérifiée. Le problème approché s'écrit alors :

$$a_\lambda(p_\xi y_\xi, p_\xi v_\xi) - (\pi_\eta(D(p_\xi y_\xi), p_\xi v_\xi) = \ell(p_\xi v_\xi) \qquad \forall v_\xi \in V_\xi$$

On montre l'existence, l'unicité, la convergence de la solution approchée dans V. D'autre part, le fait d'avoir discrétisé le contrôle permet l'interprétation du problème discrétisé en terme de contrôle d'une chaîne de Markov, l'algorithme de Howard donne alors une méthode très efficace de résolution. Des exemples numériques montrent la qualité de l'approximation obtenue.

L'analyse numérique du problème parabolique correspondant est étudié dans Quadrat [16], le problème de temps d'arrêt optimal dans Goursat-Quadrat [17], certains problèmes de contrôle impulsionnels sont résolus dans Goursat-Quadrat [18] .

4. DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DU COÛT OPTIMAL D'UN PROBLÈME DE CONTRÔLE DE CHAÎNE DE MARKOV À ÉTATS FINIS ET CONTRÔLES FINIS, AYANT DES PROBABILITÉS DE TRANSITION FORTES ET FAIBLES. (*F. Delebecque, J.P. Quadrat*).

Il est bien connu que la principale limitation à l'utilisation de la programmation dynamique est la dimension du système. Pour améliorer la situation, nous étudions ici un problème de perturbation singulière permettant de réduire la taille du problème à résoudre. Nous nous plaçons ici dans le cadre de la commande des chaînes de Markov.

Soit une chaîne de Markov X_n à états finis, contrôlés, le contrôle pouvant prendre un nombre fini de valeurs. On suppose que son générateur puisse s'écrire sous la forme $B(u) + \varepsilon A(u)$, $B(u)$ et $A(u)$ étant eux-mêmes deux générateurs, u désigne le contrôle et prend ses valeurs dans un ensemble fini. On se donne un coût revenant à étudier cette chaîne sur un temps long :

$$(1) \qquad V^{\varepsilon}(x) = \operatorname*{Min}_{u} \mathbb{E}^{x} \sum_{n=o}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon\mu)^{n+1}} f_{\varepsilon}(X_n, u_n)$$

On étudie alors le comportement asymptotique de V^{ε} en fonction de ε, dans le cas où f_{ε} est analytique en ε :

$$f_{\varepsilon} = \sum_{i=o}^{+\infty} \varepsilon^{i} f_{i}.$$

Pour cela, on commence par étudier le problème non contrôlé.

On introduit alors une chaîne de Markov agrégée $\overline{X_n}$ dont les états sont les classes finales de la chaîne rapide (de générateur B) dont les probabilités de transition

$$a_{\bar{x}\bar{x}'} = \sum_{x\in\bar{x}} p_{\bar{x}}(x) \left\{ \sum_{x'\in\bar{x}'} a_{xx'} + \sum_{y\in\bar{y}} a_{xy}\, q_{\bar{x}'}(y) \right\}$$

avec $p_{\bar{x}}$ la mesure invariante de la chaîne de générateur B de support $\bar{x}$, $q_{\bar{x}'}$ la probabilité de tomber dans $\bar{x}'$ partant d'un état transitoire $y \in \bar{y}$ pour la chaîne rapide. Le coût :

$$V^{\varepsilon}(x) = \mathbb{E}^{x} \sum_{n=o}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon\mu)^{n+1}} f(X_n)$$

converge vers $\bar{V}(x) = \bar{V}(\bar{x})$ $\forall x \in \bar{x}$, avec l'interprétation de $\bar{V}$ suivante :

$$\bar{V}(\bar{x}) = \mathbb{E}^{\bar{x}} \sum_{n=o}^{+\infty} \frac{1}{(1+\mu)^{n+1}} \bar{f}(\bar{X}_n)$$

où $$\bar{f}(\bar{x}) = \sum_{x\in\bar{x}} f_o(x)\ p_{\bar{x}}(x)$$

On voit donc que le calcul du premier terme peut se faire de façon découplée, calcul de la taille Max {$\underset{\bar{x}}{\text{Max}}$ Card $\bar{x}$, Card $\{\bar{x}\}$} dans la situation la plus favorable cette méthode peût permettre de faire passer les calculs de Kn^3 à $K'n^2$ si n désigne le nombre d'états de la chaîne de Markov.

On obtient en fait plus, on obtient le développement complet de V^{ε} chacun des termes du développement pouvant être calculé de façon découplée.

On obtient de même, pour le problème de contrôle une équation de Hamilton-Jacobi vectorielle pouvant être résolue de façon découplée et donnant le développement complet de V^{ε} solution de (1). L'équation de Hamilton-Jacobi vectoriel s'écrit :

$$\underset{u\in\mathcal{U}_o}{\text{Min}}\ B(u)V_o = 0$$

$$\underset{u\in\mathcal{U}_i}{\text{Min}}\ \{A(u)V_{i-1} + B(u)V_i + f_i(u)\} = 0 \qquad i=1,2,\ldots$$

avec : $$\mathcal{U}_i = \text{Arg} \underset{u\in\mathcal{U}_{i-1}}{\text{Min}} \{A(u)V_{i-2} + B(u)V_{i-1} + f_{i-1}(u)\}$$

$\mathcal{U}_o = \mathcal{U}$ ensemble des stratégies admissibles.

L'algorithme de résolution est encore un algorithme du type Howard (itération sur les politiques).

Dans le cas où l'ensemble n'est pas fini, des résultats partiels sont donnés dans Delebecque-Quadrat [31], dans le cas des diffusions, un résultat est énoncé dans le chapitre suivant, et une démonstration due à Bensoussan est donnée dans Delebecque-Quadrat [32].

5. APPLICATION DU CONTRÔLE STOCHASTIQUE À UN PROBLÈME DE GESTION DE RÉSERVOIRS.

(F. Delebecque, J.P. Quadrat).

Ce paragraphe présente deux intérêts :

1° - Du point de vue méthodologique il essaie d'étendre le domaine d'application du contrôle stochastique à des situations où la dimension est grande. Pour cela, il utilise deux idées :

- les techniques de perturbation singulière développées au chapitre précédent,
- l'optimisation dans la classe des feedbacks locaux qui est en fait la contribution méthodologique de ce chapitre.

2° - Il décrit une application potentielle importante des problèmes d'identification et de contrôle stochastique. Les méthodes développées ici sont une alternative possible aux méthodes utilisées actuellements dans un cadre relativement important : celui de la gestion du parc hydraulique français. La lourdeur du problème réel ne nous a pas permis de comparer les résultats avec les méthodes actuelles dans le cas français complet, des essais ont été faits sur plusieurs vallées françaises, et sur le système complet de la Nouvelle Calédonie. Les résultats ont été satisfaisants. Les méthodes permettent la résolution du cas français complet, moyennant quelques simplifications de structure dont il est difficile d'évaluer l'importance a priori. La gestion du parc hydraulique québequois utilise d'ailleurs ce genre de techniques.

Le problème consiste à gérer de façon optimale, à l'échelle de l'année, les réserves hydrauliques de la France de façon à satisfaire la demande d'électricité au moindre coût. Les aléas sont les apports d'eau x_t, et la demande z_t d'électricité, sont modélisés comme des diffusions, les variables de décision sont les turbinés des différents barrages u_t. Les quantités d'eau en stock sont notées y_t.

$e^{i,j} : (u^{i,j}, y^{i,j}) \to e^{i,j}(u^{i,j}, y^{i,j})$ représente la puissance produite par le barrage (i,j) lorsque le stock est $y^{i,j}$ et le débit turbiné $u^{i,j}$.

Si c(h) désigne le coût de production de la puissance thermique h, le problème consiste à :

$$\underset{u}{\mathrm{Min}}\ \mathbb{E} \int_0^T C(z_t - \sum_{i,j} e^{i,j})^+ dt.$$

En dehors des difficultés d'ordre purement mathématique (identification des processus, problème d'existence de problème de contrôle stochastique dégénéré, analyse numérique de tels problèmes), il existe une difficulté fondamentale qui est le problème de la dimension du système, ici 200 barrages. Pour résoudre cette difficulté, nous commençons par faire apparaître un petit paramètre $\varepsilon = \frac{1}{52}$ qui permet de distinguer entre les barrages à caractère saisonnier et les barrages à capacité hebdomadaire ou plus petite d'une part, et les composantes spectrales de la demande de période annuelle ou inférieure à la semaine d'autre part. L'étude asymptotique du problème lorsque $\varepsilon \to 0$ met en évidence le rôle de filtrage des hautes fréquences des petits barrages, ce qui est en quelque sorte une justification mathématique de certaines techniques de décomposition utilisées actuellement. Ce passage à la limite permet également de définir un problème de contrôle des grands réservoirs.
L'hypothèse de structure de vallées , disons un ou deux grands barrages par vallée, indépendance des apports, permet au problème d'avoir des dynamiques découplées. Si on se restreint alors aux feedbacks locaux (le contrôle de la vallée ne connaît que le stock d'eau et les apports de la vallée i), il est possible de calculer numériquement le meilleur feedback local. L'idée étant alors de voir le problème comme un problème de contrôle des équations de Fokker-Planck décrivant la densité de probabilité de l'état de chaque vallée. On se ramène ainsi à un problème de contrôle d'un système d'équations aux dérivées partielles, que l'on peut résoudre par des méthodes du type Pontriaguine au lieu d'avoir à résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi sur disons $\mathbb{R}^{40}$, ce qui nous paraît actuellement impossible.

Cette méthode s'étend à certaines situations où le système à une dynamique couplée, par exemple les réseaux de file d'attente ayant la forme produit, et les diffusions correspondantes. Le cas des files d'attente, présenté dans Quadrat - Viot [38] , est donnée ici en annexe de ce dernier chapitre.

D'autres applications ont été traitées également, en utilisant les mêmes techniques :

- la gestion d'une maison chauffée par le soleil et une pompe à chaleur dans Goursat-Quadrat [14].

- la gestion à long terme des stocks de gaz français dans Delebecque-Quadrat [10] .

- la gestion des moyens de production d'électricité de la Nouvelle Calédonie dans Colleter-Delebecque-Falgaronne-Quadrat [11].

Une étude en cours sur la carburation électronique d'un moteur à combustion interne utilisera certainement ce genre de techniques.

Signalons enfin l'utilisation des méthodes de gradient stochastique pour l'optimisation des capacités de transport d'électricité qui semble donner de bons résultats et qui fera l'objet de publications prochainement.

Nous donnons une liste de références représentant soit des publications, soit des étapes intermédiaires, soit des extensions, des variantes ou des applications des résultats principaux développés ici.

PUBLICATIONS.

Méthodes de simulation.

[1] J.P. QUADRAT ; M. VIOT : Approximation numérique des problèmes de programmation dynamique stochastique, IRIA Cahier n°9, Mars 1972, Méthodes Numériques d'Analyse des Systèmes, tome 1.

[2] J.P. QUADRAT ; M. VIOT : Méthodes de Simulation en Programmation Dynamique Stochastique, RAIRO, Avril 1973, R-1, pp. 3-22.

[3] J.P. KERNEVEZ ; J.P. QUADRAT ; M. VIOT : Control of a non linear stochastic boundary value problem, 5th Conference on Optimization Techniques, Lectures notes in Computer Science), Springer Verlag, Mai 1973.

[4] G. JOLY ; J.P. KERNEVEZ ; J.P. QUADRAT ; D. THOMAS ; M. VIOT : Le système monoenzymatique irréversible : Cas stationnaire, Cas quasi-stationnaire. Rapport Interne, Université de Technologie de Compiègne.

[5] J.P. QUADRAT : Méthodes de simulation en programmation dynamique stochastique, Thèse de Docteur Ingénieur, Université Paris VI, Juin 1973.

[27] BALDUCCI ; COHEN ; DODU ; GOURSAT ; HERTZ ; QUADRAT ; VIOT : Comparaison de trois méthodes d'optimisation des investissements dans un réseau de de transport d'électricité, Congrès IFAC 81.

Application de l'identification et du contrôle optimal

[6] J.P. QUADRAT : Numerical application of stochastic optimal control to inventory and investment problems, IFIP Conference Stockholm 1974.

[7] F. DELEBECQUE ; J.P. QUADRAT : Application de l'identification et du contrôle stochostique à la gestion de réservoirs, Colloque sur la théorie des systèmes et la gestion des services publics, Presses Universelles de Montréal, 1975.

[8] F. DELEBECQUE ; J.P. QUADRAT : Application of stochastic control methods in problem arising in hydropower production, 1st International Conference on Mathematic Modelling, Saint-Louis, Septembre 1977.

[9] F. DELEBECQUE ; J.P. QUADRAT : Contribution of stochastic control singular perturbation averaging and team theories to an example of large system management of hydropower production, IEEE Avril 1978, Automatic Control, Edition Special sur les grands systèmes.

[10] F. DELEBECQUE ; J.P. QUADRAT : Adaptation optimale des ressources aux besoins en gaz pour la France à l'échelle de l'année, Rapport Interne Laboria.

[11] P. COLLETER ; F. DELEBECQUE ; F. FALGARONNE ; J.P. QUADRAT : Application du contrôle stochastique à la gestion des moyennes de production d'énergie en Nouvelle Calédonie, Congrès on Recent Methods in non Linear Analysis, Mai 1978. Pitagora Editrice Bologna.

[12] P. COLLETER ; F. DELEBECQUE ; F. FALGARONNE ; J.P. QUADRAT : Application of stochastic control and identification of stochastic processes to the management of the New Caledonian power system, Linz-78 Cybernetics and System Science Conference.

[13] P. COLLETER ; F. DELEBECQUE ; F. FALGARONNE ; J.P. QUADRAT : Application of stochastic control methods to the management of energy production in New Caledonia, North Holland edited by Bensoussan A., S Tapiero and Klendorfer.

[14] M. GOURSAT ; J.P. QUADRAT : Optimisation de la gestion d'une maison chauffée par le soleil et une pompe à chaleur, Rapport de Recherche, INRIA n° 14, Mars 1980.

[25] F. FALGARONNE ; P. LEDERER ; F. DELEBECQUE ; J.P. QUADRAT : Sur l'optimisation du système de production hydroélectrique français, Journées de rencontre industrie recherche sur la maitrise des systèmes complexes, Publication IRIA, Décembre 1978.

[26] T. KARUNAKARAN ; J.P. QUADRAT ; P.S. SATSANGI : Stochastic dynamic programming model based on new decomposition methods for the water resources system of Punjab national systems, Conference Indiana, Novembre 1978.

Analyse Numérique de l'équation de Bellman

[15] J.P. QUADRAT : Analyse numérique de l'équation de Bellman, Journées sur le contrôle optimal, Gourette 1975.

[16] J.P. QUADRAT : Analyse numérique de l'équation de Bellamn stochastique, Rapport Laboria n° 140, Octobre 1975.

[17] J.P. QUADRAT : Optimal stochastic control : numerical analysis of the Bellman equation and applications, IFIP Working Conference on Modelling of Environmental systems, Tokyo Avril 1976.

[18] M. GOURSAT ; J.P. QUADRAT : Analyse numérique d'inéquations associées à des problèmes de temps d'arrêt optimaux en contrôle stochastique, Rapport Laboria n° 154, janvier 1976.

[19] M. GOURSAT ; J.P. QUADRAT : Analyse numérique d'inéquations quasi-variationnelles elliptiques associés à des problèmes de contrôle impulsionnel, Rapport Laboria n° 186, Août 1976.

Identification des processus de diffusion

[20] F. DELEBECQUE ; J.P. QUADRAT : Identification d'une diffusion stochastique, Rapport Laboria n° 121, Mai 1975.

[21] F. DELEBECQUE ; J.P. QUADRAT : Identification des caractéristiques locales d'un processus de diffusion avec sauts, Rapport Laboria 1978.

[22] F. DELEBECQUE ; J.P. QUADRAT : Estimation des caractéristiques locales de processus de diffusion stochastique avec sauts et application, 1978, Séminaire de statistique de Grenoble, 1978-1979.

[23] F. DELEBECQUE ; J.P. QUADRAT : Sur l'estimation des caractéristiques locales d'un processus de diffusion avec sauts, Journée d'automatique de Rennes, Septembre 1977.

[24] F. DELEBECQUE ; J.P. QUADRAT : Estimation of local characteristics of a jump-diffusion process, Congres des statisticiens, Oslo, 1978.

Perturbations singulières

[28] F. DELEBECQUE ; J.P. QUADRAT : Utilisation d'un théorème de mélange pour le découpage court terme-long terme en controle stochastique et application à la gestion de reservoirs, Colloque IRIA-CRM, 1976, publication de l'Université de Montréal.

[29] F. DELEBECQUE ; J.P. QUADRAT : Asymptotic problems for control of markov chains with strong and weak interactions, IRIA-IFAC, Workshop on singular perturbations in control, Juin 1978, Publication IRIA.

[30] F. DELEBECQUE ; J.P. QUADRAT : The optimal cost expansion of finite control finite states markov chain with weak and strong interactions, Submitted to mathematics of operation research, Congrès INRIA Versailles, 1980.

[31] F. DELEBECQUE ; J.P. QUADRAT : Optimal control of Markov chaim admitting strong and weak interactions, Automatica, avril 1981.

[32] F. DELEBECQUE ; J.P. QUADRAT : Problèmes assymptotiques dans la commande de chaine de Markov possédant des intéractions fortes et faibles, Rapport Interne INRIA.

Grands systèmes

[33] J.P. QUADRAT : Sur les feedbacks locaux en commande stochastique, Monographic, CNRS, à paraître.

[37] F. DELEBECQUE ; J.P. QUADRAT : Un exemple de grands système : la gestion les moyens de production hydorélectrique, Journées d'Automatique de Rennes, Septembre 1977.

[38] J.P. QUADRAT ; M. VIOT : Product form and optimal local feedback for a multiindex markov chain. Allerton Conference on Communication, Control and Computating. Octobre 1980.

Existence de solution aux problèmes de contrôle stochastique dégénérées ou non

[34] J.P. QUADRAT : Contrôle optimal de diffusion stochastique, CRAS, Mai 1977.

[35] J.P. QUADRAT : Existence de solution et algorithme de résolution numérique de problème stochastique dégénérée ou non, SIAM Journal on Control, Mars 1980.

[36] J.P. QUADRAT : Existence et algorithme de résolution numérique de problème de commande de diffusion stochastique avec sauts, Rapport Interne Laboria 1978.