ADAPTATION OPTIMALE DES RESSOURCES AUX BESOINS EN GAZ POUR LA FRANCE A L'ECHELLE DE L'ANNEE

François DELEBECQUE ; Jean Pierre QUADRAT

INTRODUCTION

On s'intéresse ici à la gestion optimale des moyens d'approvisionnements et de stockage français dont le but est de satisfaire la demande de gaz au moindre coût. Une partie des approvisionnements est aléatoire ainsi que la consommation en gaz. Après avoir estimés les processus aléatoires, on calcule la stratégie et le coût optimal, l'horizon étant l'année. Le modèle, utilisé ici, est exposé dans la note GDF LEPINOY-SEJOURNE [6] avec plus de détails.

1. - LE MODELE

On dispose :

a) de ressources de trois types :

- gaz provenant de Groningue (quantité cumulée notée G_t),
- gaz provenant de Skikda + Arzew aléatoire noté R_t (débit) que l'on modélisera par un processus stationnaire markovien,
- approvisionnement fixe.

b) de moyens de stockage. La quantité stockée a l'instant t sera notée S_t.

On a des "besoins" a satisfaire de trois types :

- fixes,
- effaçables,
- ventes à bien plaire .

On note B_t = besoins fixes + effaçables maximum - approvisionnements fixes. On fait l'approximation (raisonnable) que B_t forme une suite de variables aléatoires indépendantes.

On note :

- u_t les soutirages à l'instant t qui lorsque $u_t < 0$ s'interprèteront comme des injections,
- v_t le débit prélevé à Groningue à l'instant t,
- w_t les effacements effectués à l'intant t qui, lorsqu'ils sont négatifs, s'interprèteront comme des ventes à bien plaire.

On notera également la défaillance par :

$$y_t = B_t - R_t - u_t - v_t - w_t$$

qui, lorsque $y_t < 0$, s'interprètera comme un excès de ressources.

Le coût instantané s'écrit alors :

$$C_1(u_t) + C_2(w_t) + C_3(y_t)$$

$C_1(u)$ coût de soutirage ou d'injection selon le signe de u

$C_2(w)$ coût des effacements ou des ventes à bien plaire

$C_3(y)$ coût de défaillance ou d'excès de ressources.

Les équations d'évolution s'écrivent alors :

- Equation d'évolution du stock :

(1) $$dS_t = - u_t \, dt \quad \check{u}(S) \leq u \leq \hat{u}(s)$$
$$\check{S} \leq S_t \leq \hat{S}$$

- Equation d'évolution du prélèvement de Groningue :

(2) $$dG_t = v \, dt \quad \check{v} \leq v \leq \hat{v}$$
$$0 \leq G \leq \hat{G}$$

- Equation d'évolution du processus de Markov décrivant les ressources hors Groningue :

(3) $$dR_t = b(R_t)dt + \sigma(R_t)dW_t \quad (*)$$
$$a = \sigma^2$$

b et a sont des fonctions <u>à identifier</u>, W_t un mouvement Brownien.

(4) - B_t besoins forment une suite de v.a indépendantes en temps dont la densité de probabilité sera notée p.

Le problème de commande stochastique s'écrit :

(5) $$\underset{\substack{u\\v\\w}}{\text{Min}}\ E \int_o^t C_1(u) + C_2(w) + C_3(y_t)dt$$

2. - <u>EQUATIONS D'OPTIMALITE</u>

Si l'on désigne par :

$$V(t,S,G,R) = \underset{\substack{u\\v\\w}}{\text{Min}}\ E\{\int_t^T (C_1(u_t) + C_2(w_t) + C_3(y_t))dt \mid S_t=S,\ G_t=G,\ R_t=R\}$$

V satisfait l'équation de la programmation dynamique suivante :

(5) $$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + b\dfrac{\partial V}{\partial R} + \dfrac{1}{2}\, a\dfrac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \underset{\substack{u(B)\\v(B)\\w(B)}}{\text{Min}} \displaystyle\int [-u\frac{\partial V}{\partial S} + v\frac{\partial V}{\partial G} + C_1(u) + C_2(w) + C_3(y)]p(B)dB = 0 \\ V(T) = 0 \end{cases}$$

où p désigne la densité de probabilité de B.

(*) R_t est obtenu comme limite d'un processus dont l'accroissement $R_{t+h} - R_t$ est une variable aléatoire dont la moyenne est $b(R_t)h$ et la variance $a(R)h$, limite obtenue lorsque $h \to 0$.

En effet, supposons qu'il existe une solution suffisamment régulière de (5). On peut alors appliquer la formule d'Ito (calcul d'une différentielle pour un processus de type diffusion) à V. Pour une stratégie quelconque donnée à l'avance, on obtient :

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial R} b + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} a - u\frac{\partial V}{\partial S} + v\frac{\partial V}{\partial G}\right)dt + \frac{\partial V}{\partial R}\sigma\, dW_t$$

et, donc, grâce au fait que :

$$E\int_o^t \frac{\partial V}{\partial R}\sigma\, dW_t = 0 :$$

$$E(V(T)) - V(0) = E\int_0^T \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial R}b + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial R^2}a + \int\left(-u\frac{\partial V}{\partial S} + v\frac{\partial V}{\partial G}\right)p(B)\,dB\right]dt.$$

En utilisant alors (5) et V(T) = 0, on obtient :

$$(6)\qquad V(0) \le E\int_o^T\int (C_1(u)+C_2(w)+C_3(y))p(B)\,dB\,dt = E\int_o^T (C_1(u_t)+C_2(w_t)+C_3(y_t))\,dt$$

On montre, par un raisonnement analogue, que la stratégie u,v,w, solution de la minimisation dans (5), vérifie (6) à l'égalité.

Pour une étude des conditions d'existence et d'unicité de (5), on pourra se référer à A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS [4].

3. - IDENTIFICATION DU PROCESSUS R_t (RESSOURCES HORS GRONINGUE) COMME UN PROCESSUS A TRAJECTOIRES CONTINUES MARKOVIEN

On modélise R_t par un processus de diffusion stochastique, homogène en temps :

$$(6.0)\qquad dR_t = b(R_t)dt + \sigma(R_t)dW_t$$

Ce qui signifie que, si u désigne un nombre positif petit, $R_{t+h}-R_t$ a une loi ayant ses deux premiers moments vérifiant :

$$(6.1)\qquad E(R_{t+h}-R_t \mid R_s\ s\le t) = b(R)h + \sigma(h)$$

$$(6.2)\qquad E((R_{t+h}-R_t)^2 \mid R_s\ s\le t) = a(R)h + \sigma(h) \quad \text{avec } a = \sigma^2$$

Réciproquement, tout processus en temps discret, ayant ses deux premiers moments vérifiant les conditions (6.0) et (6.1) plus une condition d'uniforme intégrabilité, converge en loi vers la diffusion (6.0).

Un théorème dû a Girsanov nous indique que la loi de R_t, sur l'espace des fonctions continues de $[o,T]$, admet une densité par rapport à la loi engendrée par le processus suivant (loi définie sur le même espace) :

$$dZ_t = \sigma(Z_t)dW_t.$$

D'autre part, si l'on note P la loi de R, Q la loi de Z, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial Q} = \exp. \int_o^T \frac{b(R_t)}{a(R_t)}\, dR_t - \frac{1}{2}\int_o^T \frac{b^2(R_t)}{a(R_t)}\, dt$$

On se donne alors une partition $(A_1,\ldots,A_n)$ de $\mathbb{R}$.

On approxime b(R) (resp. a(R)) par :

$$b(R) = \sum_i \theta_i\, \chi_{Ai}(R)$$

$$(\text{resp.}\quad a(R) = \sum_i \mu_i\, \chi_{Ai}(R))$$

χ_{Ai} désignant la fonction caractéristique de l'ensemble Ai (prenant la valeur 1 sur Ai, O ailleurs).

L'estimateur du maximum de vraisemblance de θ_i, les μ_i étant supposées connues, est alors donné par :

$$\hat{\theta}_i = \frac{\int_o^t \chi_{Ai}(R_t)dR_t}{\int_o^t \chi_{Ai}(R_t)dt} \tag{7}$$

on voit que $\hat{\theta}_i$ ne fait pas intervenir la valeur des μ_i.

D'autre part, si l'on note :

$$R_t^i = \int_o^t \chi_{Ai}\; dR_t$$

on montre la formule suivante :

$$\mu_i = VQ(R_t^i) / \int_o^t \chi(R_t)dt$$

où $VQ(R_t^i)$ désigne la variation quadratique de R_t^i, c'est-à-dire :

$$\lim_{h \to o} \Sigma(R^i_{(j+1)h} - R^i_{jh})^2 .$$

Pour plus de détails, on pourra se référer à F. DELEBECQUE - J.P. QUADRAT [5].

Remarquons d'abord que l'on a des résultats sur la qualité des estimateurs. On a :

$$- e + \inf_{x \in Ai} b(x) \leq \hat{\theta}_i \leq \sup_{x \in Ai} b(x) + e$$

où e est une variable alétoire gaussienne de variance :

$$\frac{\mu_i}{H} \quad \text{si } H = \int_o^T \chi_{Ai}(R_S)ds .$$

De même, on a :

$$\inf_{x \in Ai} a(x) \leq \hat{\mu}_i \leq \sup_{x \in Ai} a(x).$$

On voit donc que l'on doit faire un compromis entre la taille des a_i et la variance de e.

En pratique on a découpé $\mathbb{R}$ en 3 zones, l'un des points de discontinuité correspondant à un maximum de la fréquence empirique de R_t considérée comme des tirages d'une v.a. de loi égale à la mesure stationnaire de R_t.

4. - DISCRETISATION DE L'EQUATION DE LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE

On discrétise l'équation (5) de façon à conserver à l'équation discrète l'interprétation en terme de commande stochastique.

Si h_t, h_S, h_G, h_R désignent respectivement les pas de discrétisation en temps, sur le stock, sur Groningue, sur les apports hors Groningue, on fait les approximations suivantes :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,S,G,R) \leftarrow \frac{V(t+h_t,S,G,R) - V(t,S,G,R)}{h_t}$$

$$b(R)\frac{\partial V}{\partial R}(t,S,G,R) \leftarrow \frac{V(t+h_t,S,G,R+h_R)b(R)^+ - V(t+h_t,S,G,R)\,|b(R)| + V(t+h_t,S,G,R-h_R)b(R}{h_R}$$

où b^+ et b^- désignent respectivement la partie positive et négative de b

$$a(R)\frac{\partial^2 V}{\partial R^2}(t,S,G,R) \leftarrow a(R)\ \frac{V(t+h_t,S,G,R+h_R) - 2V(t+h_t,S,G,R) + V(t+h_t,S,G,R-h_R)}{h_R^2}$$

$$u\frac{\partial V}{\partial S}(t,S,G,R) \leftarrow \frac{u^+V(t+h_t,S+h_S,G,R) - V(t+h_t,S,G,R)\,|u| + V(t+h_t,S-h_S,G,R)u^-}{h_S}$$

$\mathbb{P}(B)$ sera approximé par une loi du type $\Sigma\, \rho_i\ \delta(B_i)$ avec $\rho_i \geq 0$ $\ \Sigma\, \rho_i = 1$, $\delta(b_i)$ désignant la masse de dirac au point b_i.

Pour obtenir des théorèmes de convergence de telles discrétisations, on se référera à H. KUSHNER [2], J.P. QUADRAT [3].

En désignant par $i = (i_S,\ i_G,\ i_R)$ les points de discrétisation, de Groningue, du stock, des besoins, l'approximation de (5) s'écrit :

$$V(i) = \underset{\substack{u(j)\\ v(j)\\ w(j)}}{\mathrm{Min}} \ \sum_{i'} \sum_{j} \pi_{i;i'}(u,v,w,j)V(i') + \varphi(u,v,w,j) \tag{9}$$

où j désigne un point de discrétisation des besoins ;
où les $\pi_{i;i'}$ non nuls sont :

- pour $i' = (i_S, i_G, i_R+1)$ $\qquad \pi_{i,i'} = b^+ \frac{h_t}{h_R} + \frac{a}{2} \frac{h_t}{h_R^2}$

- pour $i' = (i_S, i_G, i_R-1)$ $\qquad \pi_{i,i'} = b^- \frac{h_t}{h_R} + \frac{a}{2} \frac{h_t}{h_R^2}$

- pour $i' = (i_S+1, i_G, i_R)$ $\qquad \pi_{i,i'} = u^-(j) \frac{h_t}{h_S}$

- pour $i' = (i_S-1, i_G, i_R)$ $\qquad \pi_{i,i'} = u^+(j) \frac{h_t}{h_S}$

- pour $i' = (i_S, I_G+1, i_R)$ $\qquad \pi_{i,i'} = v(j) \frac{h_t}{h_G}$

(10) - pour $i' = (i_S, i_G, i_R)$ $\qquad \pi_{i,i'} = 1 - |b| \frac{h_t}{h_R} - a\frac{h_t}{h_R^2} - |u(j)| \frac{h_t}{h_S} - v(j) \frac{h_t}{h_S}$

$$\varphi\ (u,v,w,j) = h_t(C_1(u(j)) + C_2(w(j)) + C_3(B_j - i_R h_R - u(j) - v(j) - w(j)))$$

avec :

$$C_1(u) = \alpha_1\ u^+ + \beta_1\ u^-$$

$$C_2(w) = \alpha_2\ w^{+2} + \beta_2\ w^+ + \gamma_2\ w^{-2}$$

$$C_3(y) = \alpha_3\ y^+ + \beta_3\ y^-$$

On a de plus la condition sur l'état final :

$$V(i_T, i_S, i_G, i_R) = 0$$

Dès que (10)est ≥ 0 (ce qui est toujours possible à condition de choisir le pas en temps suffisamment petit), (9) s'interprète comme l'équation de la programmation dynamique d'une chaîne de Markov.

(10) ≥ 0 peut être également considéré comme une condition de stabilité du point de vue de l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.

5. - CALCUL EFFECTIF DU MINIMUM DANS L'EQUATION DE LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE

Nous le ferons sur le problème continu à cause de la commodité des notations, bien qu'en pratique il soit nécessaire de le faire sur le problème discrétisé (9).

Notons :

$$\lambda = \frac{\partial V}{\partial S}$$

$$\theta = \frac{\partial V}{\partial G}$$

il faut alors minimiser :

$$\underset{\substack{u(B)\\ v(B)\\ w(B)}}{\mathrm{Min}} \int - u\,\lambda + v\,\theta + C_1(u) + C_2(w) + C_3(y)$$

sous les contraintes :

$$\check{u} \le u \le \hat{u}$$

$$\check{v} \le v \le \hat{v}$$

$$\check{w} \le w \le \hat{w}$$

$$y = B - R - u - v - w$$

pour cela, il suffit de résoudre :

$$\underset{\substack{\check{u}\le u\le\hat{u}\\ \check{v}\le v\le\hat{v}\\ \check{w}\le w\le\hat{w}\\ y=B-R-u-v-w}}{\mathrm{Min}} \{- u\,\lambda + v\,\theta + C_1(u) + C_2(w) + C_3(y)\} \tag{11}$$

Notons :

$$\tilde{C}_1(u) = C_1(u) + \chi_{[\check{u},\hat{u}]} - u\,\lambda$$

avec :

$$\chi^{(u)}_{[\check{u},\hat{u}]} = \begin{cases} +\infty & \text{si } u \notin [\check{u},\hat{u}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons de même :

$$\tilde{C}_2(w) = C_2(w) + \chi_{[\check{w},\hat{w}]}$$

$$\tilde{C}_4(v) = \theta\ v + \chi_{[\check{v},\hat{v}]}$$

En dualisant la contrainte B-R = y+u+v+w et en appelant μ la variable duale associée, on obtient la condition nécessaire et suffisante d'optimalité suivante :

$$(13) \qquad \begin{cases} \mu \in \tilde{C}'_1(u) \\ \mu \in \tilde{C}'_2(w) \\ \mu \in \tilde{C}'_3(y) \\ \mu \in \tilde{C}'_4(v) \end{cases} \qquad u + v + w + y = B - R$$

où C'_i désigne le sous gradient, ce qui se réécrit :

$$\begin{aligned} u &\in \tilde{C}'^{-1}(\mu) \\ &\in \tilde{C}'^{-1}(\mu) \\ y &\in \tilde{C}'^{-1}_3(\mu) \\ v &\in \tilde{C}'^{-1}_4(\mu) \end{aligned}$$

et donc :

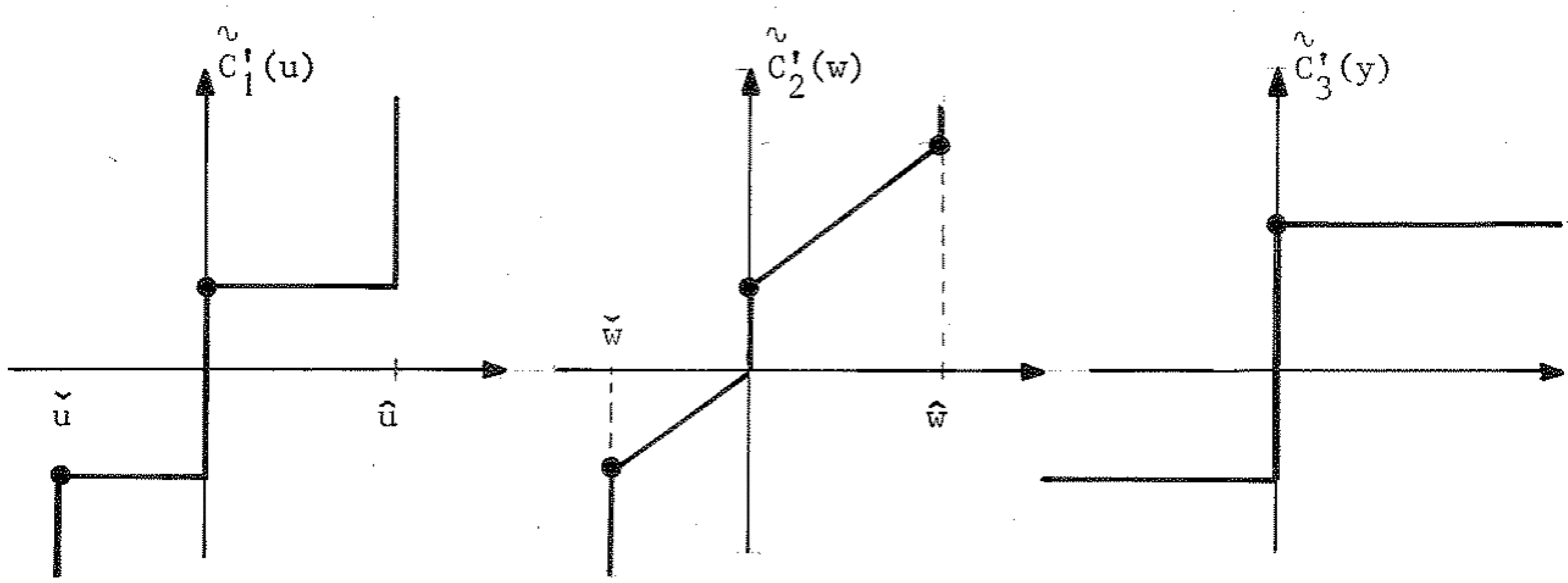
$$(14) \qquad B - R \in \sum_i \tilde{C}'^{-1}_i(\mu)$$

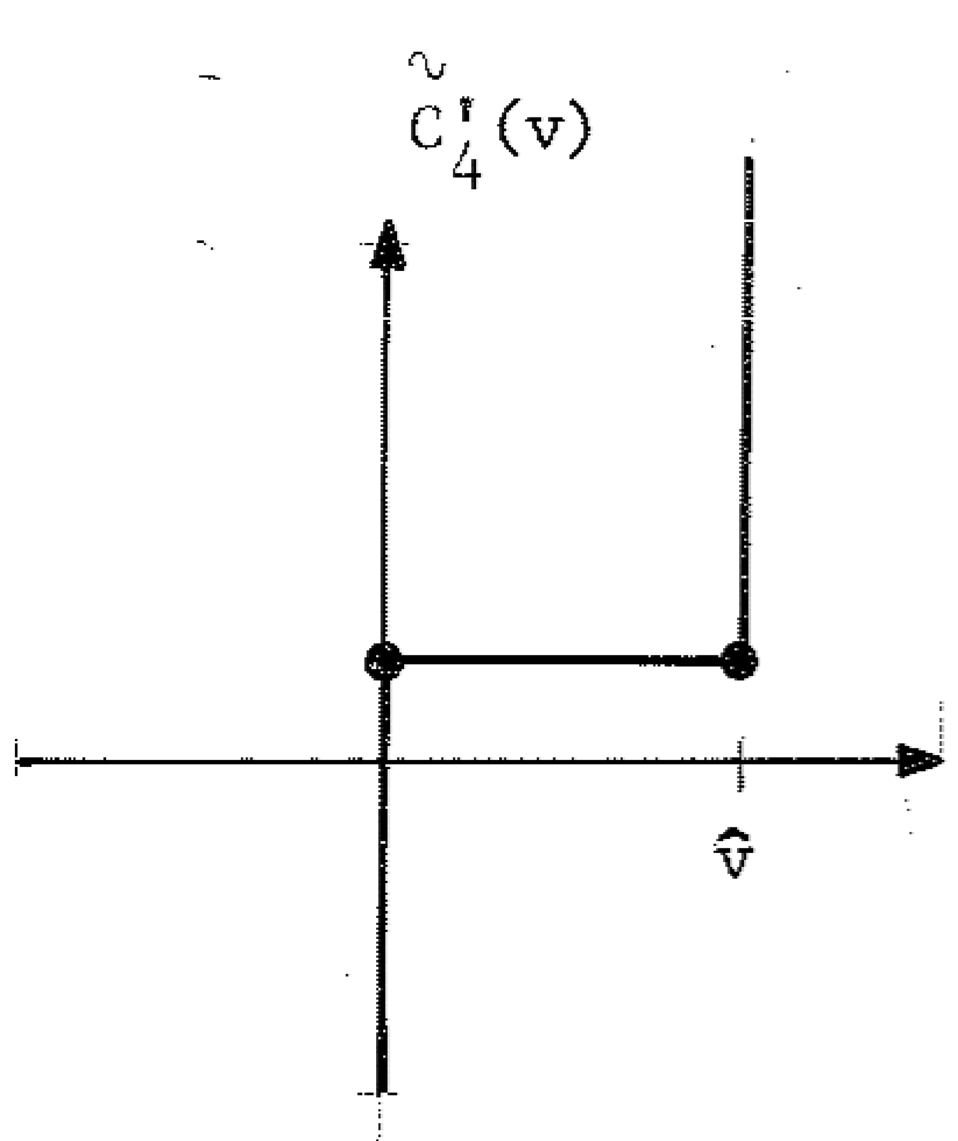
Cette relation détermine μ et on en déduit u,w,y,v.

La relation (14) a une interprétation économique très simple (on suit ici la démarche de, par exemple , PRONOVOST [1]).

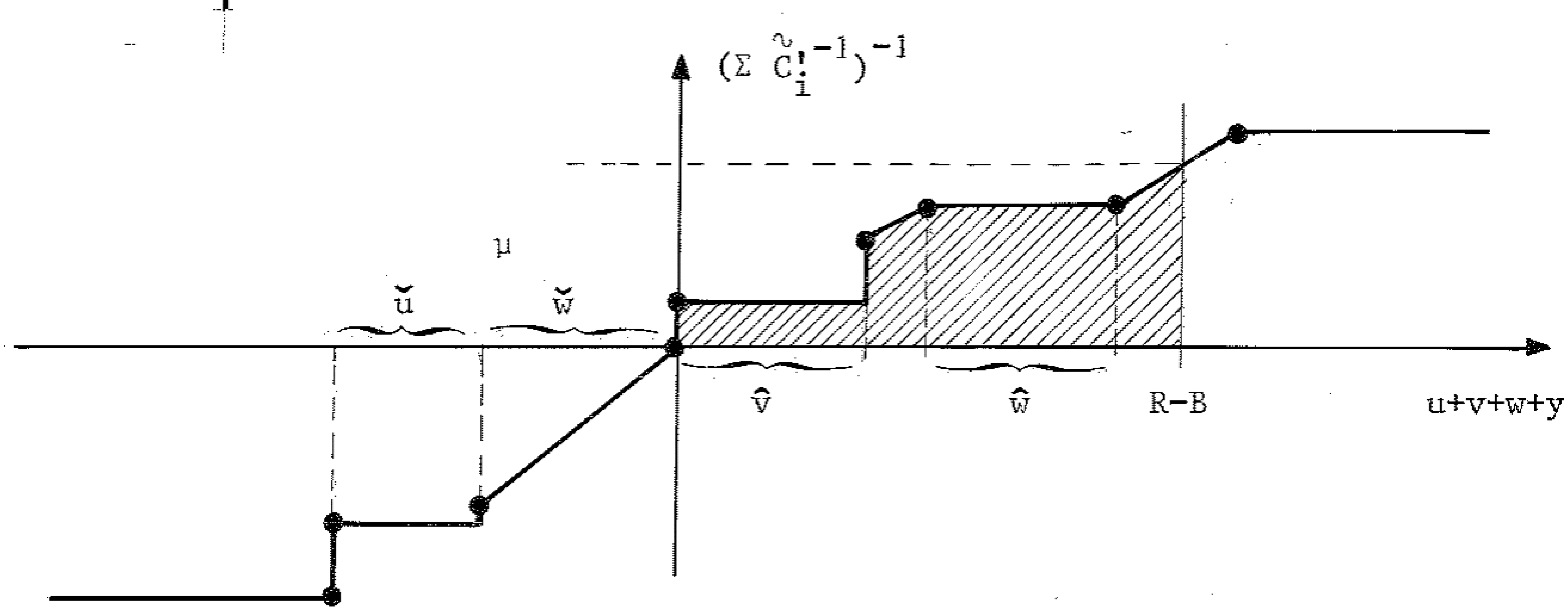
On range tous les moyens parordre de coût marginal croissant (en considérant la défaillance comme un moyen supplémentaire), c'est la construction de la courbe $\sum_i C_i'^{-1}$. On en déduit le coût marginal μ associé à une augmentation d'une unité de B-R. On utilise ensuite tous les moyens qui ont un prix strictement inférieur à μ et ce qui est nécessaire des moyens au prix μ pour satisfaire u+v+w+y = B-R.

Graphiquement on trouve :





Sur cet exemple, on obtient :



La surface hachurée représente alors le coût minimum.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. PRONOVOST
Planification de la production énergétique au moyen de modèles à réservoirs multiples.
Colloque 74 des systèmes et application à la gestion des services publics
Janvier 75, Montreal Presses Univ.

[2] H. KUSHNER
Probabilistic methods for approximation in stochastic control.
Academic Press, 1977.

[3] J.P. QUADRAT
Contrôle optimal de diffusion stochastique.
CRAS, mai 1977.

[4] A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS
Application des inéquations variationnelles en contrôle stochastique.
Dunod 1978, Paris.

[5] F. DELEBECQUE - J.P. QUADRAT
Identification d'une diffusion stochastique.
Rapport Laboria n° 121, mai 1975.

[6] LEPINOY - SEJOURNE
Adaptation des fournitures aux besoins interruptibilité au stockage.
Quelle stratégie retenir.
Note interne - Service des Etudes Economiques Gaz de France 1978.